Cálculo II (Cursão)

Aula 22 – Integrais de Superfície.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Definição 1 (Integral de Superfície de Campos Escalares)

Considere uma superfície suave S descrita por

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in T.$$

A **integral de superfície** de uma função f de três variáveis definida e limitada em S é

$$\iint_{\mathbf{r}(T)} f dS \equiv \iint_S f(x,y,z) dS = \iint_T f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv,$$

se a integral dupla da direita existir.

Note que a área da superfície é obtida tomando $f(x,y,z) = 1$, ou seja,

$$A(S) = \iint_T \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA = \iint_S 1 dS.$$

Uma superfície S dada na forma explícita por $z = g(x, y)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + g(x, y)\mathbf{k}.$$

Desse modo,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + g_x\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + g_y\mathbf{k}.$$

Logo, a integral de superfície de um campo escalar f sobre S é

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_S f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}dA.$$

Aplicações de Integrais de Superfície

Se uma folha de alumínio tiver a forma de uma superfície S e se a densidade em (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então a massa total da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

O centro de massa será o ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tal que

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x, y, z) dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x, y, z) dS$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x, y, z) dS.$$

O momento de inércia I_L também pode ser definido de forma semelhante.

Exemplo 2

Sabendo que o centro de massa da casca de um hemisfério de raio $a > 0$ e densidade uniforme $\rho(x, y, z) = c$ tem coordenadas $(0, 0, \bar{z})$, determine $\bar{z}$.

Dica: Lembre-se que a esfera de raio a é descrita por

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| = a^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Exemplo 2

Sabendo que o centro de massa da casca de um hemisfério de raio $a > 0$ e densidade uniforme $\rho(x,y,z) = c$ tem coordenadas $(0,0,\bar{z})$, determine $\bar{z}$.

Dica: Lembre-se que a esfera de raio a é descrita por

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \mathbf{j} + a \cos\phi \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| = a^2 \operatorname{sen}\phi.$$

Resposta: A massa m da casca do hemisfério é

$$m = \iint_S c dS = c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = 2\pi c a^2.$$

A coordenada $\bar{z}$ do centro de massa é:

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z c dS = \frac{c}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (a \cos\phi)(a^2 \operatorname{sen}\phi) d\phi d\theta = \frac{a}{2}.$$

Mudança de Parametrização

Note que quando definimos a integral de superfície de f em S como

$$\iint_{\mathbf{r}(A)} f dS = \iint_A f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv,$$

usamos a parametrização $\mathbf{r}$ de S.

Contudo, mostraremos que a integral de superfície em geral não depende da parametrização da superfície.

Com efeito, suponha que temos duas parametrizações $\mathbf{r} : A \to S$ e $\mathbf{R} : B \to S$ de uma superfície S em que

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in A,$$
$$\mathbf{R}(s,t) = \tilde{X}(s,t)\mathbf{i} + \tilde{Y}(s,t)\mathbf{j} + \tilde{Z}(s,t)\mathbf{k}, \quad (s,t) \in B.$$

Suponha também que existe uma transformação bijetora e de classe $\mathcal{C}^1$ dada por

$$\mathbf{g}(s,t) = U(s,t)\mathbf{i} + V(s,t)\mathbf{j}, \quad \forall (s,t) \in B,$$

tal que

$$R(s,t) = \mathbf{r}\big(\mathbf{g}(s,t)\big), \quad \forall (s,t) \in B.$$

Nesse caso, dizemos que **r** e **R** são **suavemente equivalentes**.

Vamos denotar o determinante jacobiano de **g** por

$$\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} & \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial s} & \frac{\partial V}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial s} = U_s V_t - U_t V_s.$$

Pela regra da cadeia, tem-se

$$\mathbf{R}_s = \frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial s} = \mathbf{r}_u U_s + \mathbf{r}_v Vs,$$
$$\mathbf{R}_t = \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial t} = \mathbf{r}_u U_t + \mathbf{r}_v Vt.$$

Consequentemente, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t &= (\mathbf{r}_u U_s + \mathbf{r}_v V_s) \times (\mathbf{r}_u U_t + \mathbf{r}_v V_t) \\ &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(U_s V_t) + (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u)(V_s U_t) \\ &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(U_s V_t - U_t V_s) \\ &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\frac{\partial(U, V)}{\partial(s, t)}.\end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável em integrais duplas, tem-se:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{r}(A)} f dS &= \iint_A f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv \\
&= \iint_B f\Big(\mathbf{r}\big(\mathbf{g}(s,t)\big)\Big) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \left| \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} \right| ds dt \\
&= \iint_B f\big(\mathbf{R}(s,t)\big) \|\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t\| ds dt \\
&= \iint_{\mathbf{R}(B)} f dS.
\end{aligned}$$

Concluindo, tem-se o teorema:

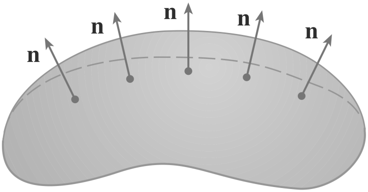
Teorema 3

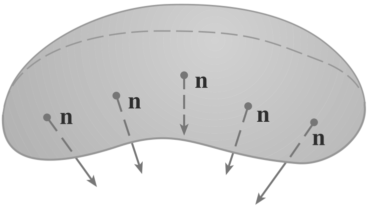
Se $\mathbf{r} : A \to S$ e $\mathbf{R} : B \to S$ são parametrizações suavemente equivalentes de uma superfície S, então

$$\iint_{\mathbf{r}(A)} f dS = \iint_{\mathbf{R}(B)} f dS.$$

Superfícies Orientadas

Considere uma superfície suave S. Dizemos que S é uma **superfície orientada** se for possível escolher um vetor normal unitário $\mathbf{n}$ em cada ponto (x, y, z) de S de modo que $\mathbf{n}$ varie continuamente sobre S.



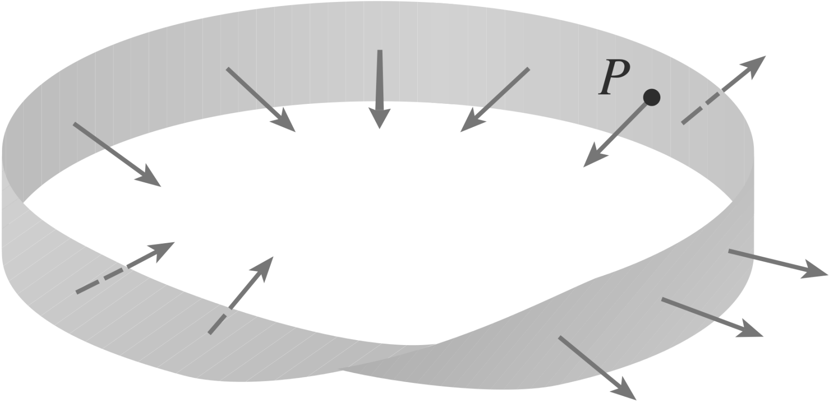


(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Note que existem dois vetores normais unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ a superfície em cada ponto (x, y, z). Portanto, existem duas possíveis orientações para uma superfície orientada.

Exemplo de uma Superfície Não-Orientada

A faixa de Möbius é um exemplo de superfície não-orientada!



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Se S é dada pela equação implícita $G(x, y, z)$, lembrando que o gradiente é normal à uma superfície de nível, tem-se

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \frac{G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k}}{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}.$$

Em geral, dizemos que a orientação é positiva *para cima* da superfície.

Para uma superfície fechada (como a esfera), a convenção é que a orientação positiva é aquela cujos *vetores normais apontam para fora*.

Exemplo 4

O vetor normal $\mathbf{n}$ à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (de raio a centrada na origem) é

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}.$$

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Definição 5 (Integral de Superfície de Campos Vetoriais)

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$. A **integral de superfície de F sobre** S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

se a integral da direita existir. A integral acima é também chamada **fluxo** de $\mathbf{F}$ através de S.

Se S for uma superfície paramétrica suave, como $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$, podemos escrever

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv.$$

Além disso, escrevendo **r** em termos de suas componentes como

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k},$$

concluímos que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} \\ &= (Y_u Z_v - ZuY_v)\mathbf{i} + (Z_u X_v - X_v Z_u)\mathbf{j} + (X_u Y_v - Y_u X_v)\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k},\end{aligned}$$

em que

$$\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} A_u & B_u \\ A_v & B_v \end{vmatrix} = A_u B_v - A_v B_u = \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u}.$$

Analogamente, escrevendo o **F** em termos de suas componentes

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k},$$

concluímos que

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_T \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)dudv = \iint_T P(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}dudv \\ &+ \iint_T Q(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}dudv + \iint_T R(\mathbf{r}(u,v))\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}dudv\end{aligned}$$

Motivados pela regra para mudança de variável em integrais duplas, denotamos

$$da \wedge db = \frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)}dudv.$$

Assim, a integral de superfície do campo vetorial pode ser escrita como

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S Pdy\wedge dz + \iint_S Qdz\wedge dx + \iint_S Rdx\wedge dy.$$

Exemplo 6

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exemplo 6

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resposta:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{3}.$$

Aplicações

Exemplo 7 (Fluxo Elétrico e Carga Elétrica)

Se $\mathbf{E}$ é um campo elétrico, então $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ é chamada **fluxo elétrico** de $\mathbf{E}$ através da superfície. A Lei de Gauss diz que a carga total englobada por S é

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E},$$

em que ϵ_0 é uma constante conhecida como *permissividade no vácuo*.

Exemplo 8

Se o campo vetorial do Exemplo 6 representa um campo elétrico, então a carga envolvida por S é $Q = 4\pi\epsilon_0/3$.

Aplicações

Exemplo 9 (Fluxo de Calor)

Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) seja $u(x, y, z)$. O **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\nabla u,$$

em que K é uma constante denominada **condutividade**. A **taxa de transmissão de calor** através da superfície S no corpo é dada por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos as integrais de superfície:

- **Integral de um campo escalar**:

$$\iint_{\mathbf{r}(T)} f dS \equiv \iint_S f(x,y,z) dS = \iint_T f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

- **Integral de um campo vetorial** ou **fluxo de F através de S**:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Além de introduzir esses conceitos e suas notações, mostramos que a integral de superfície é invariante a parametrizações suavemente equivalentes.

Muito grato pela atenção!