Cálculo II (Cursão)

Aula 21 – Superfícies Parametrizáveis e suas Áreas.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Representação de uma Superfície

Nas aulas anteriores, vimos que uma superfície S pode ser definida na **forma implícita** pela equação

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in T\},$$

ou na **forma explícita**, em que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}.$$

Uma superfície S também pode ser descrita usando a **representação paramétrica**, na qual x, y, z são determinados por funções X, Y e Z de outras variáveis u e v, chamadas parâmetros:

$$S = \{(x,y,z) : x = X(u,v),\ y = Y(u,v),\ z = Z(u,v),\ (u,v) \in T\},$$

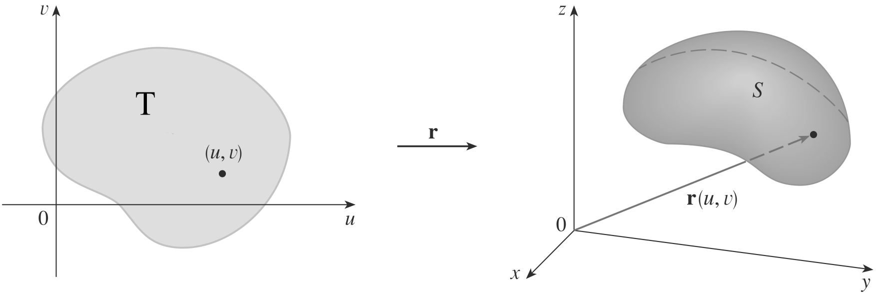
em que $T \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto conexo.

Superfície Paramétrica

Na representação paramétrica, a superfície S corresponde à imagem de

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in T,$$

chamada **equação vetorial da superfície**.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Exemplo 1

A esfera de raio a e centro na origem pode ser descrita pelas equações paramétricas

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \equiv X(\theta,\phi),\\
y &= a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \equiv Y(\theta,\phi),\\
z &= a\cos\phi \equiv Z(\theta,\phi),
\end{aligned}
$$

para $(\theta,\phi) \in T = [0,2\pi]\times[0,\pi]$.

Exemplo 2

Um cone circular de altura h cujo ângulo no vértice da base é 2α pode ser descrito pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, \theta) = u \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \mathbf{i} + u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + u \cos \alpha,$$

em que $(u, \theta) \in T = [0, h/\cos \alpha] \times [0, 2\pi]$.

Dizemos que S é uma superfície **simples** se $\mathbf{r} : T \to S$ é bijetora.

Nesse curso, consideraremos superfícies simples. Além disso, geralmente assumiremos que $\mathbf{r}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ em T, ou seja, as derivadas parciais

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial v}\mathbf{k},$$

existem e são contínuas em T.

Note que se $\mathbf{r}_u(u, v)$ e $\mathbf{r}_v(u, v)$, quando existem, tangenciam a superfície em $\mathbf{r}(u, v)$.

Além disso, o produto vetorial, dado pelo determinante,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

fornece o vetor normal $\mathbf{n}$ à superfície no ponto $\mathbf{r}(u, v)$.

Note que se $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ forem ambas contínuas em T, então o vetor normal $\mathbf{n}$ também é contínuo em T. Consequentemente, a superfície não possui vértices ou quinas.

Além disso, se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, então eles determinam o **plano tangente** à S em $\mathbf{r}(u, v)$.

Com base nas observações anteriores, dizemos que $\mathbf{r}(u, v) \in S$ é um **ponto regular** se $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são ambas contínuas em (u, v) e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$. Caso contrário, diremos que $\mathbf{r}(u, v) \in S$ é um **ponto singular** da representação paramétrica.

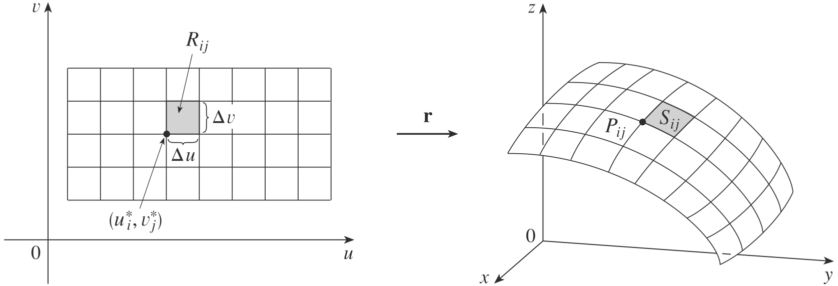
A superfície S é dita **suave** se todos os seus pontos são regulares.

Cuidado: A regularidade (e singularidade) depende da representação paramétrica da superfície. Um ponto pode ser regular numa representação mas singular em outra representação paramétrica.

Área de uma Superfície Paramétrica

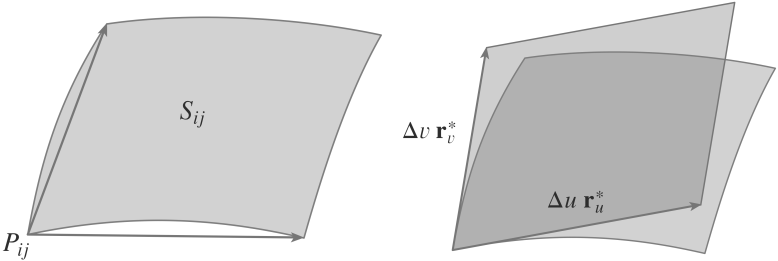
Vamos motivar a definição da área da superfície suave e simples S considerando T como um retângulo.

Vamos também dividir T em sub-retângulos R_{ij} cujo vértice inferior esquerdo é (u_i^*, v_j^*). A parte da superfície que corresponde à R_{ij} será denotada por S_{ij} e denotaremos por $P_{ij} = \mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Agora, podemos aproximar a área de S_{ij} pela área do paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*)$ e $\Delta v \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Em termos matemáticos, escrevendo $\mathbf{r}_\bullet^* = \mathbf{r}_\bullet(u_i^*, v_j^*)$, tem-se

$$A(S_{ij}) \approx \|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)\| = \|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*\| \Delta u \Delta v.$$

e a área da superfície é:

$$A(S) \approx \sum_i \sum_j \|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*\| \Delta u \Delta v.$$

Nossa intuição diz que obtemos aproximações melhores para $A(S)$ tomando $\Delta u, \Delta v \to 0$. Tem-se dessa forma uma soma de Rimemann.

Além disso, a motivação anterior pode ser generalizada para uma região conexa arbitrária T como segue:

Definição 3 (Área de uma Superfície Parametrizável)

A área de uma superfície parametrizável suave e simples é dada pela integral dupla

$$A(S) = \iint_T \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

Área da Superfície na Representação Explícita

Se uma superfície é dada na forma implícita pela equação

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in T,$$

então podemos usar x e y como parâmetros para encontrar a equação vetorial

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}, \quad (x,y) \in T.$$

Nesse caso,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}.$$

Logo, a área da superfície S dada por $z = f(x,y)$, $(x,y) \in T$, é

$$A(S) = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

Área da Superfície na Representação Explícita

Suponha que existe uma bijeção que projeta uma superfície S dada na forma implícita por

$$F(x, y, z) = 0,$$

em $T \subset \mathbb{R}^2$. Usando derivação implícita, podemos mostrar que a área de S é

$$A(S) = \iint_T \frac{1}{|F_z|} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} dxdy.$$

Teorema de Papus

Considere a superfície S obtida pela rotação de $z = f(x)$, para $a \leq x \leq b$, ao redor do eixo z.

A superfície de revolução pode ser escrita na forma paramétrica como

$$r(u,\theta) = u\cos\theta\mathbf{i} + u\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j} + f(u)\mathbf{k}, \quad (u,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi].$$

Sua área é

$$A(S) = \int_b^a \int_0^{2\pi} u\sqrt{1 + [f'(u)]^2}d\theta du = \int_a^b u\sqrt{1 + [f'(u)]^2}du.$$

Exemplo 4 (Área de um Hemisfério)

O hemisfério norte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pode ser obtida pela rotação de

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

ao redor do eixo z. Pelo teorema de Papus, tem-se

$$A(S) = 2\pi \int_0^a u \sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2 - u^2}} du = 2\pi a^2.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de superfície paramétrica, que é descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in T.$$

A superfície é dita simples se $\mathbf{r}$ é bijetora.

Dizemos que a superfície é suave se as derivadas parciais $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são ambas contínua e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$.

A área de uma superfície suave e simples é dada pela integral dupla

$$A(S) = \iint_T \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv.$$

Muito grato pela atenção!