Cálculo II (Cursão)

Aula 20 – Integrais Múltiplas

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Hipercaixas e Suas Partições

Uma hipercaixa $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq \mathbb{R}^n$, em que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, corresponde ao produto cartesiano dos intervalos fechados $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Equivalentemente, tem-se:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, \forall j = 1, \ldots, n\}.$$

O volume da hipercaixa $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ é dado pelo produto:

$$V([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

Se $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são respectivamente partições dos intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, então o produto cartesiano

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n,$$

é uma partição da hipercaixa $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Função Degrau e sua Integral Múltipla

Uma função degrau s definida sobre uma partição P da hipercaixa $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ é tal que

$$s(\mathbf{x}) = c_i, \quad \forall \mathbf{x} \in Q_i,$$

em que Q_i denota uma sub-hipercaixa de P.

A integral múltipla de uma função degrau $s : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ é

$$\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} s dV = \sum_{i=1}^{n} c_i V(Q_i),$$

em que $V(Q_i)$ denota o volume da i-ésima sub-hipercaixa Q_i de P.

Também denotamos a integral múltipla como

$$\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{ou} \quad \underset{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{\int \ldots \int} s(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Integral Múltipla de uma Função Limitada em $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

As integrais (múltiplas) inferior e superior de um campo escalar limitado em $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ são definidas respectivamente como segue:

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} s dV : s \leq f \text{ é uma função degrau} \right\},$$

e

$$\overline{I}(f) = \inf \left\{ \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} t dV : f \leq t \text{ é uma função degrau} \right\}.$$

Se as integrais superior e inferior coincidem, isto é, $I(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, então dizemos que f é integrável em $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ e denotamos

$$I(f) = \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} f dV = \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underset{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{\int \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Integral Múltipla de uma Função Limitada

Podem-se mostrar, tal como no caso bidimensional, que uma função limitada na hipercaixa $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ é integrável se o conjunto de suas descontinuidades tem medida nula.

Sobretudo, definimos a integral múltipla de uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ limitada em uma região limitada S considerando a função auxiliar $\hat{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, em que $S \subseteq [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, dada por

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\hat{f}$ for integrável, então escrevemos

$$\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \hat{f} dV = \int_S f dV = \int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underset{S}{\int \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Destacamos que o volume $V(S)$ de um sólido $S \subseteq \mathbb{R}^n$ pode ser determinado pela integral múltipla

$$V(S) = \int_S dV.$$

Na prática, geralmente calculamos uma integral múltipla usando integrais iteradas de dimensão menor.

Exemplo 1

Se conseguimos escrever a região S de integração como

$$S = \{\mathbf{x} : \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}), (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in Q\},$$

então podemos escrever a integral múltipla como a integral iterada

$$\int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int \ldots \int}_{Q} \left[\int_{\varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_n \right] dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Mudança de Variável

Tal como no caso bidimensional, a mudança de variável é feita multiplicando o integrando pelo valor absoluto do determinante da matriz Jacobiana da mudança de variável.

Com efeito, suponha que a mudança de variável

$$x_1 = X_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots x_n = X_n(u_1, \ldots, u_n),$$

define uma transformação $\mathbf{X} : T \to S$ bijetora e de classe $\mathcal{C}^1$. Nesse caso, tem-se

$$\int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_T f\big(\mathbf{X}(\mathbf{u})\big) |\det J(\mathbf{u})| d\mathbf{u},$$

em que J denota a matriz Jacobiana cujas componente na linha i e coluna j é a derivada parcial $\frac{\partial X_i}{\partial u_j}$.

Exemplo 2 (Coordenadas Cilíndricas)

Nas coordenadas cilíndricas, escrevemos

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = z,$$

com $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Dessa forma, o jacobiano da transformação é $J(r,\theta,z) = r$ e, portanto, vale a identidade:

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_T f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)rdrd\theta dz,$$

em que T descreve S usando coordenadas cilíndricas.

Exemplo 3 (Coordenadas Esféricas)

Nas coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \quad \text{e} \quad z = \rho\cos\phi,$$

com $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $\rho > 0$.

Dessa forma, o valor absoluto do jacobiano da transformação é $|J(\rho, \theta, \phi) = \rho \operatorname{sen}\phi$. Logo, vale a identidade:

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_T f(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)\rho\operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi,$$

em que T descreve S usando coordenadas esféricas.

Considerações Finais

Na aula de hoje estendemos as integrais duplas para um campo escalar limitado definido em um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, chamado simplesmente como integral múltipla.

De um modo geral, as integrais múltiplas são definidas de forma análoga a definição das integrais duplas.

Destacamos também como é feita mudança de variável em integrais múltiplas e ilustraremos esse item considerando o sistema de coordenadas cilíndricas e esféricas no contexto de integrais triplas.

Muito grato pela atenção!