Cálculo II (Cursão)

Aula 19 – Mudança de Variáveis em Integrais Duplas.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

No curso de Cálculo I, vimos que uma mudança de variável pode muitas vezes transformar uma integral complicada numa integral mais fácil de ser calculada.

Relembrando, a mudança de variável obtida considerando $x = g(t)$ é feita através da equação

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt,$$

onde $a = g(c)$ e $b = g(d)$.

Na aula de hoje veremos como efetuar a mudança de variável em uma integral dupla no qual escrevemos x e y como funções de novas variáveis u e v que podem simplificar o integrando ou a região de integração.

Considere uma transformação T do plano uv no plano xy, ou seja,

$$T(u,v) = (x,y).$$

Em outras palavras, temos

$$x = X(u,v) \quad \text{e} \quad y = Y(u,v).$$

Vamos assumir que T é bijetora, ou seja, admite uma inversa T^{-1} tal que

$$T^{-1}(x,y) = (u,v),$$

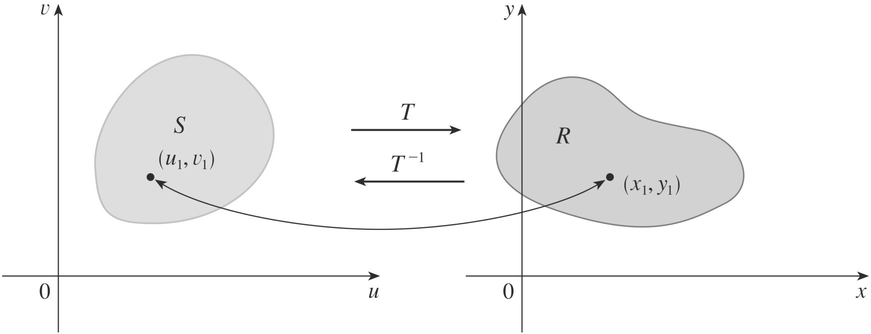
ou ainda,

$$u = U(x,y) \quad \text{e} \quad v = V(x,y).$$

Dessa forma, podemos ir e voltar para ambos (u,v) e (x,y).

Assumimos também que T é uma função classe de $\mathcal{C}^1$, ou seja, tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

A figura abaixo ilustra a transformação T e sua inversa T^{-1}:



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Exemplo 1

Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv.$$

Esboce a imagem do quadrado $S = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

Exemplo 1

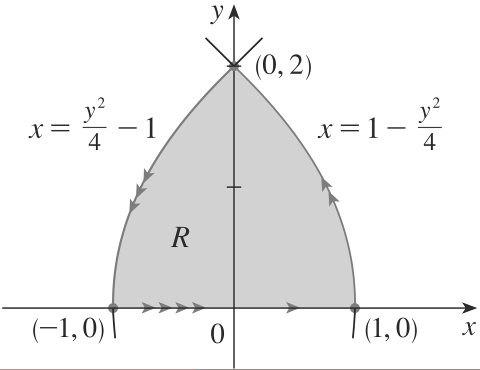
Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad y = 2uv.$$

Esboce a imagem do quadrado $S = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

Resposta:

A imagem do quadrado é a região limitada pelas parábolas $x = 1 - y^2/2$ e $x = y^2/4 - 1$ no semi-plano $y \geq 0$.
(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

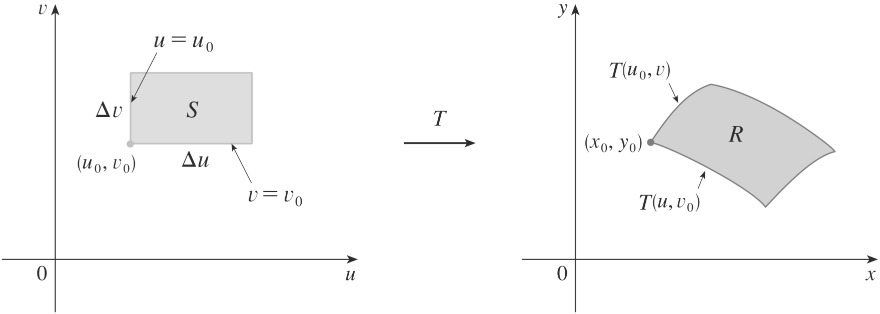


Interpretação Geométrica da Mudança de Variável

Basicamente, para calcular a integral $\iint_R f(x,y)dA$ usando as novas variáveis u e v, precisamos escrever dA em termos de du e dv. Considere um pequeno retângulo S no plano uv:

$$S = [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v].$$

Nosso objetivo será estimar a área ΔA da imagem $R = T(S)$ de S.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Lembrando que
$$T(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j},$$

- O vetor tangente a curva $T(u,v_0)$ em $T(u_0,v_0) = (x_0,y_0)$ é
$$T_u(u_0,v_0) = \frac{\partial X}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\mathbf{j}.$$
- O vetor tangente a curva $T(u_0,v)$ em $T(u_0,v_0) = (x_0,y_0)$ é
$$T_v(u_0,v_0) = \frac{\partial X}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\mathbf{j}.$$

Agora, podemos aproximar a área ΔA de R pelo paralelogramo delimitado pelos vetores $\Delta u T_u(u_0,v_0)$ e $\Delta v T_v(u_0,v_0)$.

Lembrando que área do paralelogramo é dado pela norma do produto vetorial, obtemos

$$\Delta A \approx |\Delta u T_u(u_0, v_0) \times \Delta v T_v(u_0, v_0)| = |T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)| \Delta u \Delta v,$$

como estimativa da área ΔA de R.

Agora, o produto vetorial $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$ é dado pelo determinante:

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Note que

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

chamado **jacobiano**, denota o determinante da matriz Jacobina da transformação T.

Logo, a área ΔA de R é aproximada por:

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \left| J(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v,$$

em que $|J(u_0, v_0)|$ denota o valor absoluto do jacobiano em (u_0, v_0).

A aproximação acima torna-se melhor quando $\Delta u, \Delta v \to 0$. Nesse caso, tem-se:

Teorema 2 (Mudança de variáveis em uma integral dupla)

Suponha que T seja uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $T(S) = R$ e $S = T^{-1}(R)$. Suponha também que o jacobiano de T seja não nulo no interior de S. Se f é contínua sobre R, então

$$\iint_R f(x, y) dxdy = \iint_S f\big(X(u, v), Y(u, v)\big) |J(u, v)| dudv.$$

Exemplo 3 (Coordenadas Polares)

No sistema de coordenadas polares, temos

$$x = X(r,\theta) = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = Y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta.$$

O jacobiano da transformação é

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\,\theta = r.$$

Logo, pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)dA &= \iint_S f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv \\ &= \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)rdrd\theta. \end{aligned}$$

Exemplo 4

Utilize a mudança de coordenadas $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R y dA$, em que R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.
(**Dica:** Use o resultado do Exemplo 1).

Exemplo 4

Utilize a mudança de coordenadas $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para calcular a integral $\iint_R ydA$, em que R é a região delimitada pelo eixo x e pelas parábolas $y^2 = 4 - 4x$ e $y^2 = 4 + 4x$, $y \geq 0$.
(**Dica:** Use o resultado do Exemplo 1).

Resposta:

$$\iint_R ydA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2)dudv = 2.$$

Exemplo 5

Calcule a integral
$$I = \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA,$$
em que R é a região trapezoidal com vértices $(1,0), (2,0), (0,-2)$ e $(0,-1)$.

Exemplo 5

Calcule a integral

$$I = \iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA,$$

em que R é a região trapezoidal com vértices $(1,0), (2,0), (0,-2)$ e $(0,-1)$.

Resposta:

$$I = \frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Nas próximas páginas, vamos apresentar a demonstração do Teorema 2 nas seguintes etapas:

1. Lema 6: Caso em que R é um retângulo e $f(x, y) = 1$.
2. Lema 7: Caso em que R é um retângulo mas f não é constante.

Finalmente, o caso geral em que R é uma região fechada e limitada arbitrária segue de um modo análogo ao raciocínio usado para definir integrais duplas em regiões gerais.

Lema 6

Suponha que T seja uma transformação com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tal que $T(S) = R$ é um retângulo e $S = T^{-1}(R)$. Suponha também que o jacobiano de T seja não nulo no interior de S. Nesse caso, tem-se

$$\iint_R dxdy = \iint_S |J(u,v)|dudv.$$

Demonstração do Lema 6

Pelo teorema de Green, tem-se

$$I = \iint_R dxdy = \oint_{\partial R} xdy,$$

em que a fronteira ∂R é percorrida no sentido anti-horário.

Supondo que $x = X(u, v)$ e $y = Y(u, v)$, podemos descrever a fronteira ∂R como a imagem de T aplicada em uma parametrização

$$\alpha(t) = U(t)\mathbf{i} + V(t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq b.$$

da fronteira ∂S de S. Note que $u = U(t)$ e $v = V(t)$.

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{du}{dt}.$$

Portanto,

$$I = \int_a^b X(U(t), V(t)) \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{dV}{dt} \right) dt$$
$$= \oint_{\partial S} \left(X \frac{\partial Y}{\partial u} du + X \frac{\partial Y}{\partial v} dv \right),$$

em que o sentido da última integral de linha deve ser tal que $I > 0$, pois este valor corresponde à área de R.

Aplicando novamente pelo teorema de Green com $P = X\frac{\partial Y}{\partial u}$ e $Q = X\frac{\partial Y}{\partial v}$ e assumindo o sentido positivo, encontramos

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right) dudv = \iint_S J(u, v) dudv,$$

se $J(u, v)$ for positivo. Como I representa a área de R, se $J(u, v) < 0$ devemos percorrer a fronteira ∂S no sentido negativo.

Combinando ambos os casos, concluímos a demonstração do lema! □

Lema 7

Suponha que T seja uma transformação com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tal que $T(S) = R$ é um retângulo e $S = T^{-1}(R)$. Suponha também que o jacobiano de T seja não nulo no interior de S. Se f é contínua sobre R, então

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f\big(X(u,v),Y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv.$$

Demonstração do Lema 7:
Primeiramente, sendo f uma função contínua em uma região fechada e limitada, f é limitada em no retângulo e, portanto, integrável em R.

Sejam s e t funções degrau em R tais que

$$s \leq f \leq t.$$

Por um lado, integrando as inequações $s \leq f \leq t$ sobre R, tem-se

$$\iint_R s(x,y)dxdy \leq \iint_R f(x,y)dxdy \leq \iint_R t(x,y)dxdy.$$

Por outro lado, substituindo $x = X(u,v)$ e $y = Y(u,v)$, obtemos as desigualdades para $(u,v) \in S$.

$$s(X(u,v),Y(u,v)) \leq f(X(u,v),Y(u,v)) \leq t(X(u,v),Y(u,v)).$$

Multiplicando por $|J(u,v)|$ e integrando sobre S, concluímos que

$$\begin{aligned} &\iint_S s(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv \\ &\leq \iint_S f(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv \\ &\leq \iint_S t(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv. \end{aligned}$$

Como s é uma função degrau, tem-se $s(x,y) = c_{ij}$ para $(x,y) \in R_{ij}$, em que R_{ij} denota um sub-retângulo de uma partição de R.

Usado a definição de integral dupla e o Lema 6 com $S_{ij} = T^{-1}(R_{ij})$, concluímos que

$$\begin{aligned}\iint_R s(x,y)dxdy &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}A(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\iint_{R_{ij}} dxdy \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\iint_{S_{ij}} |J(u,v)|dudv \\ &= \iint_S s(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv.\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se

$$\iint_R t(x,y)dxdy = \iint_S t(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\iint_R s(x,y)dxdy \leq \iint_R f(x,y)dxdy \leq \iint_R t(x,y)dxdy.$$

e

$$\iint_R s(x,y)dxdy \leq \iint_S f(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv \leq \iint_R t(x,y)dxdy.$$

Como $\iint_R f(x,y)dxdy$ existe e, portanto, é igual à

$$\sup_s \iint_R s(x,y)dxdy = \inf_t \iint_R t(x,y)dxdy,$$

concluímos que

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(X(u,v),Y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

$\square$

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos como efetuar a mudança de variável numa integral dupla que pode ser usada para simplificar o integrando ou a região de integração.

Ilustramos a mudança de variável das coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

Concluímos a aula delineando a demostração do teorema sobre a mudança de variáveis usando o Teorema de Green.

Muito grato pela atenção!