Cálculo II (Cursão)

Aula 17 – Integrais Duplas em Regiões Gerais.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos a integral dupla de uma função f limitada em um retângulo $Q = [a, b] \times [c, d]$.

Especificamente, primeiro definimos os conjuntos não-não vazios

$$S(f) = \left\{ \iint_Q sdA : s \leq f \text{ é uma função degrau} \right\},$$

$$T(f) = \left\{ \iint_Q tdA : f \leq t \text{ é uma função degrau} \right\}.$$

Se $\sup S(f) = \inf T(f) = I(f)$, então definimos

$$\iint_Q fdA = I(f).$$

e dizemos que f é integrável em Q.

Condição Necessária e Suficiente para Integração

Pode-se mostrar, usando a definição de supremo e ínfimo, que uma função f limitada em um retângulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ é integrável se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existem funções degrau s e t, com $s \leq f \leq t$ tais que

$$\iint_Q t dA - \iint_Q s dA < \epsilon A(Q),$$

em que $A(Q) = (b - a)(d - c)$ é a área do retângulo Q.

Equivalentemente, usando a aditividade da integral dupla, uma função limitada f é integrável em Q se, e somente se,

$$\iint_Q (t - s) dA < \epsilon A(Q).$$

Integração de Função Contínua em Retângulo

Se f é uma função contínua em um retângulo Q, pode-se mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existem funções degrau s^* e t^*, com $s^* \leq f \leq t^*$, tais que

$$t^*(x,y) - s^*(x,y) < \epsilon, \quad \forall (x,y) \in Q.$$

Com efeito, essa desigualdade pode ser obtida considerando uma partição P de Q suficientemente fina e definindo, para todo (x,y) no sub-retângulo $Q_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, as seguintes funções degrau:

$$s^*(x,y) = \min\{f(x,y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$
$$t^*(x,y) = \max\{f(x,y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

Dessa forma, concluímos que f é integrável em Q pois

$$\iint_Q (t^* - s^*) dA < \iint_Q \epsilon dA = \epsilon A(Q).$$

Conjuntos de Medida Nula

Além das funções contínuas, podemos mostrar que uma função f limitada em um retângulo Q é integrável se o conjunto de descontinuidades for suficientemente "pequeno". Formalmente:

Definição 1 (Conjunto Limitado de Medida Nula)

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado é dito de **medida nula** se, para todo $\epsilon > 0$, existem retângulos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tais que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} A(Q_i) < \epsilon,$$

em que $A(Q_i)$ denota a área do retângulo Q_i.

Os conjuntos de medida nula satisfazem as seguintes propriedades:

- Qualquer conjunto finito de pontos de R^2 tem medida nula.
- A união de um número finito de conjuntos de medida nula também tem medida nula.
- Qualquer subconjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula.
- Um segmento de reta no plano tem medida nula.

Como uma generalização do último item, tem-se:

Teorema 2

Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. O gráfico de* φ*,*

$$\mathcal{G} = \{(x, y) : y = \varphi(x), a \leq x \leq b\},$$

é um conjunto de medida nula.

Funções Descontínuas em Retângulos

Teorema 3

Uma função f limitada em um retângulo Q é integrável se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

O teorema acima pode ser usado para estabelecer a integral dupla de uma função limitada em uma região S mais geral.

Integral de Funções Contínuas

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua no interior de S.

Sendo S limitado, existe um retângulo Q tal que $S \subseteq Q$. Sobretudo, podemos definir a função $\hat{f} : Q \to \mathbb{R}$ como segue:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\hat{f}$ estende f para o retângulo Q atribuindo valor zero em $(x,y) \in Q \setminus S$, ou seja, nos pontos de Q que não pertencem à S.

Se $\hat{f}$ for integrável em Q, definimos

$$\iint_S f dA = \iint_Q \hat{f} dA.$$

Vejamos casos em que f é integrável em Q!

Região do Tipo I

Definição 4 (Região do Tipo I)

Uma região $S \subseteq \mathbb{R}^2$ que pode ser escrita como

$$S = \{(x, y) : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

em que $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, é chamada **região do tipo I**.

Note que a fronteira ∂S de uma região S do tipo I é a união de segmentos de retas paralelos ao eixo y e dos gráficos de φ_1 e φ_2. Logo, ∂S é um conjunto de medida nula.

Se f é contínua numa região S do tipo I, então o conjunto das descontinuidades de sua extensão $\hat{f}$ em Q corresponde à fronteira de S, um conjunto de medida nula. Logo, $\hat{f}$ é integrável.

Teorema 5

Se S é uma região do tipo I e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função limitada em S e contínua no interior de S, então a integral dupla de f em S existe e satisfaz

$$\iint_S f dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy dx.$$

Com efeito, a identidade no teorema é deduzida como segue:

$$
\begin{aligned}
\iint_S f dA &= \iint_Q \hat{f} dA = \int_a^b \int_c^d \hat{f}(x,y) dy dx \\
&= \int_a^b \left[\int_c^{\varphi_1(x)} \hat{f}(x,y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \hat{f}(x,y) dy \right] dx \\
&= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy dx.
\end{aligned}
$$

Região do Tipo II

Analogamente, tem-se:

Definição 6 (Região do Tipo I)

Uma região $S \subseteq \mathbb{R}^2$ é dita do **tipo II** se pode ser escrita como

$$S = \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

em que $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Teorema 7

Se S é uma região do tipo II e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função limitada em S e contínua no interior de S, então a integral dupla de f em S existe e satisfaz

$$\iint_S f dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 8

Calcule o volume do sólido delimitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dica: Use a simetria do sólido.

Exemplo 8

Calcule o volume do sólido delimitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dica: Use a simetria do sólido.

Resposta: O volume do elipsoide é

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Exemplo 9

Calcule a integral iterada

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2) dy dx.$$

Exemplo 9

Calcule a integral iterada

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)dydx.$$

Resposta:

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)dydx = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)dxdy = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$

Exemplo 10

A integral dupla $I(f)$ de uma função positiva f pode ser escrita como a seguinte integral iterada:

$$I(f) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dydx.$$

Determine a região de integração de S e inverta a ordem das integrais.

Exemplo 10

A integral dupla $I(f)$ de uma função positiva f pode ser escrita como a seguinte integral iterada:

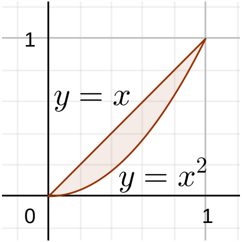
$$I(f) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)dydx.$$

Determine a região de integração de S e inverta a ordem das integrais.

Resposta:

A figura ao lado ilustra a região de integração S. Invertendo os limites de integração, obtemos:

$$I(f) = \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy.$$



Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos condições suficientes para uma função f limitada ser integrável. Em particular, destacamos que f é integrável se o conjunto de suas descontinuidades tem medida nula.

Vimos também como calcular a integral de uma função contínua no interior de regiões do tipo I ou do tipo II. Nesses casos, temos

$$\iint_S f dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy dx,$$

ou

$$\iint_S f dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx dy.$$

Muito grato pela atenção!