Cálculo II (Cursão)

Aula 16 – Integral Dupla de Função Limitada em Retângulo.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula de hoje, apresentaremos iniciaremos o estudo das integrais duplas.

Especificamente, definiremos a integral dupla de uma função limitada sobre retângulos.

Para tanto, usaremos o conceito de supremo e ínfimo.

Supremo e Ínfimo

Seja S um subconjunto não-vazio dos números reais.

Dizemos que x é uma cota inferior e y é uma cota superior de S se

$$x \leq s \quad \text{e} \quad s \leq y, \quad \forall s \in S.$$

A maior conta inferior, quando existir, é chamada ínfimo de S e denotado por $\inf S$. Equivalentemente, $a = \inf S$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $s \in S$ tal que $a \leq s < a + \epsilon$.

Analogamente, a menor cota superior, quando existir, é chamado **supremo de** S e denotado por $\sup S$. Se $b = \sup S$ então para todo $\epsilon > 0$, existe $s \in S$ tal que $b - \epsilon < s \leq b$.

Tanto ínfimo como o supremo, quando existem, são únicos!

Exemplo 1

Se $S = (a, b)$ é um intervalo aberto, então $\inf S = a$ e $\sup S = b$. Analogamente, se $S = [a, b]$ é um intervalo fechado, então $\inf S = a$ e $\sup S = b$.

Exemplo 2

Considere o conjunto $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Temos que

$$\inf S = 0 \quad \text{e} \quad \sup S = 1.$$

Exemplo 3

Considere o conjunto

$$S = [a, +\infty).$$

Nesse caso, $\inf S = a$ mas S não admite supremo em $\mathbb{R}$.

Partição de um Retângulo

Considere um retângulo

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Uma partição de Q é um conjunto $P = P_x \times P_y$ dado pelo produto Cartesiano de partições

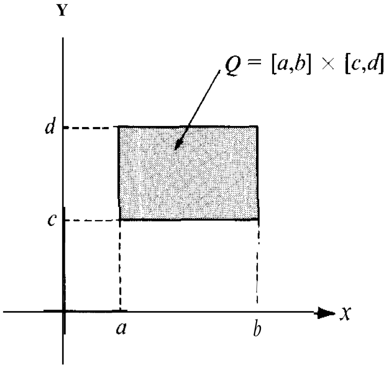
$$P_x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad \text{com } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

e

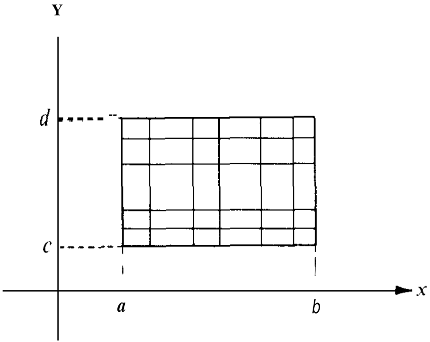
$$P_y = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}, \quad \text{com } c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Dizemos que P' é uma partição mais finda que P se $P \subseteq P'$.

O produto cartesiano de subintervalos abertos de P_x e P_y, isto é $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, é chamado sub-retângulo de P ou de Q.



a) Exemplo de um retângulo Q.



b) Exemplo de uma partição P.

(Figuras extraídas do livro do Apostol, Calculus, vol 2.)

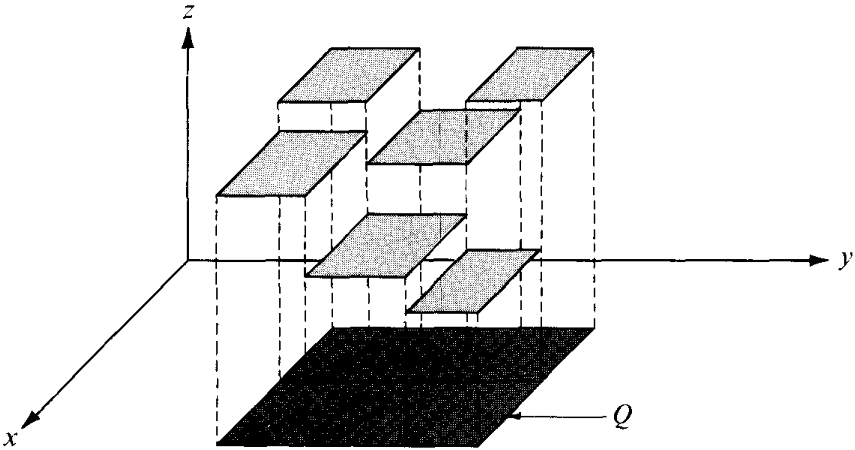
Função Degrau

Definição 4 (Função Degrau)

Uma função $s : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ é uma função degrau (*step function*) se existe uma partição P de $Q = [a, b] \times [c, d]$ na qual s é constante em cada sub-retângulo de P, ou seja,

$$s(x, y) = c_{ij}, \quad \text{se} \quad x_{i-1} < x < x_i \quad \text{e} \quad y_{j-1} < y < y_j,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.



Exemplo de uma função degrau.
(Figura extraída do livro do Apostol, Calculus, vol 2.)

Se s é uma função degrau positiva, o volume do sólido que está acima de Q e abaixo do gráfico de s é a soma do volume das caixas determinadas pelos sub-retângulos de P, ou seja,

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

No caso mais geral, em que f é ou não positiva, tem-se:

Definição 5 (Integral Dupla de uma Função Degrau)

A integral dupla de uma função degrau em um retângulo Q é

$$\iint_Q s dA = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

em que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Integral Dupla de Funções Limitas em Retângulos

Sejam $Q = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo e $f : Q \to \mathbb{R}$ uma função limitada, ou seja, existem m e M tais que

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in Q.$$

Sendo limitada, f pode ser aproximada por baixo e por cima por funções degrau s e t, ou seja,

$$s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y), \quad \forall (x, y) \in Q.$$

Nesse caso, escrevemos $s \leq f \leq t$ em Q.

Note que as funções constantes $s_1(x, y) = m$ e $t_1(x, y) = M$ podem ser vistas como funções degrau que satisfazem $s_1 \leq f \leq t_1$ em Q.

Denotaremos por $S(f)$ o conjunto dos valores as integrais duplas de todas as funções degrau que aproximam f por baixo, ou seja,

$$S(f) = \left\{ \iint_Q s dA : s \leq f \text{ é uma função degrau } \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Analogamente, definiremos

$$T(f) = \left\{ \iint_Q t dA : f \leq t \text{ é uma função degrau } \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Como

$$\iint_Q s dA \leq \iint_Q t dA,$$

para quaisquer funções $s \leq f \leq t$, temos que o conjunto $S(f)$ possui supremo e $T(f)$ possui ínfimo. Além disso, vale a desigualdade $\sup S(f) \leq \inf T(f)$.

Definição 6 (Integral Dupla de Função Limita em Retângulo)

Sejam $Q = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo e $f : Q \to \mathbb{R}$ uma função limitada em Q. A integral dupla inferior de f e a integral dupla superior de f são definidas respectivamente como o supremo de $S(f)$ e o ínfimo de $T(f)$, ou seja,

$$\underline{I}(f) = \sup S(f) \quad \text{e} \quad \overline{I}(f) = \inf T(f).$$

Dizemos que f é integrável sobre Q se as integrais superior e inferior são iguais, ou seja,

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f).$$

Nesse caso, $I(f)$ é chamado **integral dupla** de f sobre Q e denotada por

$$I(f) = \iint_Q f dA.$$

Integral Iterada

O seguinte teorema fornece um método fácil para calcular a integral dupla de f sobre Q, quando ela existir.

Teorema 7 (Integral Iterada ou Teorema de Fubini)

Seja f uma função limitada e integrável sobre um retângulo $Q = [a,b] \times [c,d]$. Suponha que, para $y \in [c,d]$, a integral $\int_a^b f(x,y)dx$ existe define uma função $A(y)$. Se a integral $\int_c^d A(y)dy$ existe, então ela é igual a integral dupla de f sobre Q, ou seja,

$$\iint_Q f dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy.$$

*As duas integrais no termo da direita é chamado **integral iterada** de f em Q.*

Demonstração do Teorema 7

Sejam s e t duas funções degrau tais que $s \leq f \leq t$ em Q. Integrando com respeito à x, obtemos:

$$\int_a^b s(x,y)dx \leq \int_a^b f(x,y)dx \leq \int_a^b t(x,y)dx, \quad \forall y \in [c,d].$$

Como a integral $\int_c^d A(y)dy$ existe, integrando com respeito à y obtemos as inequações

$$\int_c^d \left[\int_a^b s(x,y)dx\right] dy \leq \int_c^d A(y)dy \leq \int_c^d \left[\int_a^b t(x,y)dx\right] dy$$

$$\Leftrightarrow \iint_Q s(x,y)dA \leq \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \leq \iint_Q t(x,y)dA$$

Essas inequações mostram que $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$ é uma cota superior de $\iint_Q s(x,y)dA$ e também é uma cota inferior de $\iint_Q t(x,y)dA$. Logo, tem-se

$$\sup S(f) = \underline{I}(f) \leq \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \leq \overline{I}(f) = \inf T(f).$$

Como a integral de f em Q existe, temos $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$ e, portanto, concluímos que

$$I(f) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

$\square$

De um modo análogo, podemos mostrar que

$$\iint_Q f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

Exemplo 8

Admitindo que a integral dupla existe, calcule

$$I(f) = \iint_Q (x \operatorname{sen} y - ye^x) dA,$$

em que $Q = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$.

Exemplo 8

Admitindo que a integral dupla existe, calcule

$$I(f) = \iint_Q (x \operatorname{sen} y - ye^x) dA,$$

em que $Q = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$.

Resposta: Usando integrais iteradas, obtemos

$$I(f) = \left(\frac{1}{e} - e \right) \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemplo 9

Admitindo que a integral dupla existe, calcule

$$I(f) = \iint_Q \sqrt{|y - x^2|} dA,$$

em que $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$.

Exemplo 9

Admitindo que a integral dupla existe, calcule

$$I(f) = \iint_Q \sqrt{|y - x^2|} dA,$$

em que $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$.

Resposta: Integrando primeiro em y e depois em x, obtemos

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 \sqrt{|y - x^2|} dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2} dy \right] dx \\ &= \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de função degrau e suas integrais duplas sobre retângulos.

Posteriormente, apresentamos a definição da integral dupla sobre retângulo de uma função limitada em um retângulo Q, denotada por

$$I(f) = \iint_Q f(x,y)dA.$$

Mostramos que, se a integral dupla existe, então ela pode ser calculada usando as integrais iteradas

$$I(f) = \iint_Q f(x,y)dA = \int_a^b \int_d^c f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Muito grato pela atenção!