# Cálculo II (Cursão)

## Aula 15 – Condições Necessárias e Suficientes para um Campos Vetorial ser Conservativos.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

# Introdução

Na aula anterior, apresentamos o segundo teorema fundamental do cálculo ($2^o$ TFC) para integrais de linha.

Resumidamente, **f** é um campo vetorial conservativo e contínuo em um conjunto conexo aberto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, então

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}),$$

em que **a** e **b** são os extremos do caminho $\mathcal{C}$ e $\varphi$ é o potencial de **f**, ou seja, $\mathbf{f} = \nabla\varphi$.

Segue do $2^o$ TFC que a integral de linha de um campo vetorial conservativo conservativo é independente do caminho.

Veremos na aula de hoje, como determinar o potencial nesse caso.

# Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

O primeiro teorema fundamental do cálculo ($1^o$ TFC) para um função real $f$ contínua em $S$ estabelece a seguinte identidade entre a derivada e a integral:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Equivalentemente, se definirmos uma função $\varphi$ através da equação

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in S,$$

então

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Vamos estender esse resultado para integrais de linha.

## Teorema 1 ($1^o$ TFC)

*Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo e $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo cuja integral de linha independe do caminho em $S$. Dado $\mathbf{a} \in S$, defina o campo escalar $\varphi$ pela equação*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha},$$

*em que $\alpha$ denota uma curva suave que descreve um caminho $\mathcal{C} \subseteq S$ com extremos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{x}$. Nesse caso, o gradiente de $\varphi$ é $\nabla\varphi = \mathbf{f}$.*

# Demonstração do Teorema 1

Vamos mostrar que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x})}{h} = f_k(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

em que $\mathbf{e}_k$ denota o $k$-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

---

Sendo $S$ aberto, existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(\mathbf{x}; r) \subseteq S$. Usando a aditividade da integral de linha temos que

$$\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha},$$

em que $\mathcal{C} \subseteq S$ é um caminho com extremos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k$, para $|h| < r$.

---

Como a integral de linha independe do caminho $\mathcal{C}$, podemos considerar o seguimento de reta dado por

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{e}_k, \quad 0 \leq t \leq h.$$

Dessa forma, temos que

$$\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x}) = \int_0^h \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_k dt = \int_0^h f_k(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) dt.$$

Tomando

$$g(t) = f_k(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k),$$

obtemos, usado o $1^o$ teorema fundamental do cálculo, as equações

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - \varphi(\mathbf{x})\right) \\
&= \frac{1}{h} \int_0^h f_k(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^h g(t) dt = g'(0) \\
&= f_k(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

$\square$

# Condição Necessária e Suficiente

para um Campo Vetorial ser Conservativo

Com base no $1^o$ TFC, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 2 (Condição Necessária e Suficiente)**

*Seja* $\mathbf{f}$ *um campo vetorial contínuo em um conjunto aberto conexo* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*. As seguintes condições são equivalentes:*

- $\mathbf{f}$ *é o gradiente de um campo escalar* $\varphi : S \to \mathbb{R}$*.*
- *A integral de linha de* $\mathbf{f}$ *independe do caminho em* $S$*.*
- *A integral de linha de* $\mathbf{f}$ *é zero ao longo de qualquer curva suave por partes fechada.*

Note que se $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ ao longo de uma curva fechada $\mathcal{C}$, então $\mathbf{f}$ não é conservativo. Contudo, $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0$ para uma família (infinita) de caminhos não garante que $\mathbf{f}$ é conservativo.

## Exemplo 3

Mostre que

$$\mathbf{f}(x, y) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j},$$

é tal que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0$ ao longo de qualquer círculo centrado na origem. Porém, **f** não é um campo vetorial conservativo.

# Condição Necessária

para um Campo Vetorial ser Conservativo

O seguinte teorema apresenta uma condição necessária para um campo vetorial ser conservativo:

**Teorema 4 (Condição Necessária)**

*Seja* $\mathbf{f}$ *um campo vetorial com derivadas parciais contínuas em um conjunto aberto* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*. Se* $\mathbf{f}$ *é conservativo, então*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

# Demonstração do Teorema 4

Se **f** é um campo vetorial conservativo, então existe $\varphi$ tal que $\nabla\varphi = \mathbf{f}$. Por um lado temos,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Como as derivadas parciais das componentes de **f** são contínuas, as derivadas mistas de $\varphi$ são também contínuas e, portanto, são iguais. $\square$

Na prática, para determinar se um campo vetorial é conservativo, primeiro verificamos se a condição necessária estabelecida pelo Teorema 4 é satisfeita.

No caso afirmativo, usamos integrais indefinidas para determinar o potencial $\varphi$.

## Exemplo 5

Se

$$\mathbf{f}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k},$$

é um campo vetorial conservativo, determine $f$ tal que $\mathbf{f} = \nabla f$.

Na prática, para determinar se um campo vetorial é conservativo, primeiro verificamos se a condição necessária estabelecida pelo Teorema 4 é satisfeita.

---

No caso afirmativo, usamos integrais indefinidas para determinar o potencial $\varphi$.

## Exemplo 5

Se

$$\mathbf{f}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k},$$

é um campo vetorial conservativo, determine $f$ tal que $\mathbf{f} = \nabla f$.

**Resposta:** A função potencial desejada é

$$\varphi(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + k,$$

em que $k$ é uma constante.

# Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o primeiro teorema fundamental do cálculo ($1^o$ TFC) para integrais de linha.

O $1^o$ TFC fornece condições necessárias e suficientes para um campo vetorial ser conservativo.

Além do $1^o$ TFC, apresentamos condições necessárias – e mais fácil de ser verificada – para um campo vetorial ser conservativo.

No caso afirmativo, podemos determinar o potencial usando integrais indefinidas conforme ilustrado em exemplos.

Muito grato pela atenção!