Cálculo II (Cursão)

Aula 14 – Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Motivação

O segundo teorema fundamental do cálculo afirma que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f, ou seja, $F' = f$.

Em palavras, a integral de f sobre o intervalo $[a, b]$ é obtida avaliando uma de suas primitivas nos extremos a e b do intervalo.

Na aula de hoje, veremos um teorema semelhante para as integrais de linha! Antes, porém, precisamos falar sobre conjuntos conexos e independência do caminho.

Conjuntos Conexos

Definição 1 (Conjunto Conexo por Caminhos)

Um conjunto aberto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito conexo por caminho, ou simplesmente conexo nesse curso, se existe um caminho suave por partes $\mathcal{C}$ em S ligando quaisquer dois pontos de S. Em termos matemáticos, para quaisquer dois pontos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$, existe uma curva suave por partes $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}(a)$ e $\mathbf{b} = \boldsymbol{\alpha}(b)$.

Definição 2 (Conjunto Disconexo)

Um conjunto aberto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito disconexo se S é a união de dois ou mais conjuntos abertos disjuntos e não vazios, ou seja,

$$S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i, \quad \text{com } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j,$$

em que $\mathcal{I}$ denota um conjunto de índices e $A_i \neq \emptyset$ é aberto $\forall i \in \mathcal{I}$.

Independência do Caminho

Em geral, a integral de linha de um campo vetorial depende do caminho. Em alguns casos, porém, tem-se a seguinte definição.

Definição 3 (Independência do caminho)

Dizemos que a integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ de um campo vetorial $\mathbf{f}$ contínuo em um conjunto aberto conexo S é **independente do caminho** se $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbb{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ para quaisquer dois caminhos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em S que tenham os mesmos pontos iniciais e finais.

Teorema 4

A integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ de um campo vetorial contínuo $\mathbf{f}$ definido sobre um conjunto conexo S é independente do caminho se e somente se $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0$ para toda curva fechada $\mathcal{C}$ em S.

Teorema Fundamental do Cálculo - TFC

Teorema 5 (2^o TFC para Integrais de Linha)

Seja φ *um campo vetorial diferenciável tal que* $\nabla\varphi$ *é contínuo em um conjunto aberto conexo* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*. Dada uma curva suave por partes* $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathcal{S}$ *que descreve um caminho* $\mathcal{C}$ *em S, tem-se*

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}),$$

em que $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}(a)$ *e* $\mathbf{b} = \boldsymbol{\alpha}(b)$ *denotam os extremos do caminho* $\mathcal{C}$*.*

Demonstração do 2º TFC para Integrais de Linha

Primeiramente, vamos admitir que $\boldsymbol{\alpha}$ é uma curva suave.

Defina a função composta
$$g(t) = \varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$
Pela regra da cadeia, temos
$$g'(t) = \nabla\varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t).$$
Além disso, como $\boldsymbol{\alpha}$ é suave e $\nabla\varphi$ é contínuo, g' também é contínua.
Pela definição da integral de linha e aplicando o 2º TFC em g, concluímos que
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} &= \int_a^b \nabla\varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)dt = \int_a^b g'(t)dt \\ &= g(b) - g(a) = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

No caso em que $\alpha : [a, b] \to S$ é uma curva suave por partes, dividimos o intervalo $[a, b]$ em k subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, para $i = 1, \ldots, k$, e aplicamos o resultado anterior em cada subintervalo. Usando a aditividade da integral de linha, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} &= \int_a^b \nabla\varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \nabla\varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\varphi(\boldsymbol{\alpha}(t_i)) - \varphi(\boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})) \right] \\
&= \varphi(\boldsymbol{\alpha}(t_k)) - \varphi(\boldsymbol{\alpha}(t_0)) \\
&= \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Campo Vetorial Conservativo

Segue do segundo teorema fundamental do cálculo que a integral de linha do gradiente contínuo de um campo escalar é independente do caminho.

Definição 6 (Campo Vetorial Conservativo)

Um campo vetorial $\mathbf{f}$ definido em um conjunto aberto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é um *campo vetorial conservativo* se ele for o gradiente de um campo escalar φ diferenciável em S, ou seja, se existir $\varphi : S \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in S$. Neste caso, φ é denominada *função potencial* de $\mathbf{f}$.

Embora geralmente considerarmos $S = \mathbb{R}^n$, para determinar se um campo vetorial conservativo $\mathbf{f}$ é conservativo, devemos nos atentar com o domínio S. Com efeito, existem expressões que resultam num campo vetorial conservativo em certos domínios mas não são conservativos em outros.

Exemplo 7

Sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. O potencial do campo vetorial conservativo $\mathbf{f}(x, y, z) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ é $\varphi(x, y, z) = r^n$.

Exemplo

A lei da gravitação de Newton estabelece que a força $\mathbf{f}$ que uma partícula de massa M exerce sobre outra partícula de massa m tem magnitude GmM/r^2, em que r denota a distância entre as duas partículas.

Considerando que a partícula de massa M está na origem e a partícula de massa m está localizada no ponto $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, concluímos que a força sobre essa segunda partícula é

$$\mathbf{f} = -\frac{GmM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r}.$$

O potencial da força gravitacional, conhecido como potencial gravitacional, é

$$\varphi(x,y,z) = \frac{GmM}{r}.$$

O trabalho realizado para mover a partícula de massa m de $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ para $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, pelo segundo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, é

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

em que $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ e $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, enunciamos o segundo teorema fundamental do cálculo (2^o TFC) para integrais de linha. Resumidamente, tem-se

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}),$$

em que **a** e **b** são os extremos do caminho $\mathcal{C}$.

Se $\mathbf{f} = \nabla\varphi$, então **f** é chamado campo vetorial conservativo e φ é chamado potencial de **f**.

Na próxima aula, apresentaremos condições necessárias e suficientes para um campo vetorial contínuo ser conservativo.

Muito grato pela atenção!