Cálculo II (Cursão)

Aula 13 – Integral de Linha com Respeito ao Comprimento de Arco.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, definimos a integral de linha de um campo vetorial $\mathbf{f}$ contínuo sobre um caminho $\mathcal{C}$ definido por uma curva suave $\alpha(t)$, para $a \leq t \leq b$, através da equação

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\alpha = \int_a^b \mathbf{f}\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)dt.$$

Na aula de hoje, apresentaremos o conceito de integral de linha com respeito ao comprimento do arco.

Ilustraremos as integrais de linha com respeito ao comprimento de arco com algumas de suas aplicações. Iniciaremos com uma aplicação em distribuição de massa.

Distribuição de Massa

Imagine um fio de um material fino mas com densidade variável.

Especificamente, suponha que a densidade é dada por um campo escalar $\rho : S \subseteq R^2 \to \mathbb{R}$ em que $\rho(x, y)$ denota a massa por unidade de comprimento num ponto $(x, y) \in \mathcal{C}$, em que $\mathcal{C}$ é um caminho em $\mathbb{R}^2$ descrito por uma curva suave $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$.

Para determinar a massa do fio, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de tamanho igual Δt e tomamos $(x_i, y_i) = \alpha(t_i)$.

Note que os pontos $P_i = (x_i, y_i)$ dividem o caminho $\mathcal{C}$ em n subarcos de comprimento $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$.

O comprimento Δs_i do i-ésimo subarco pode ser aproximado pelo comprimento da diferença $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$, ou seja,

$$\Delta s_i \approx \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

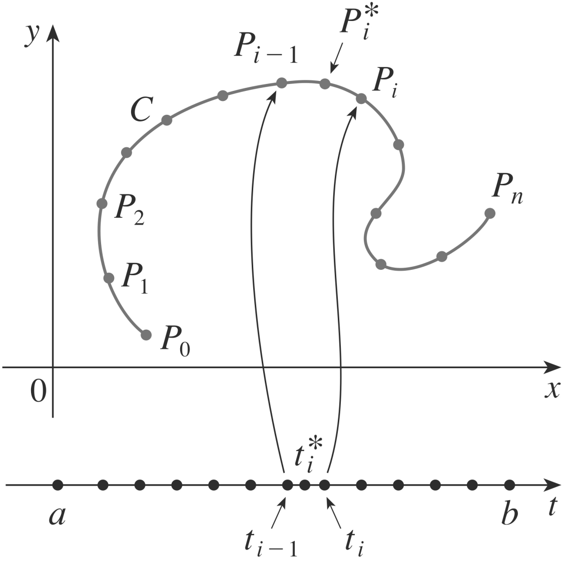
Sendo α uma curva suave, pelo teorema do valor médio, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\alpha'(t_i^*)\Delta t = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}).$$

Portanto,

$$\Delta s_i \approx \|\alpha'(t_i^*)\|\Delta t.$$

Na próxima página, ilustramos $\mathcal{C}$ e os pontos $P_i = \alpha(t_i)$. Aqui, denotamos por $P_i^* = \alpha(t_i^*)$ o ponto no i-ésimo subarco obtido considerando o parâmetro t_i^*.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Concluindo, a massa do fio é aproximadamente

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho\big(\boldsymbol{\alpha}(t_i^*)\big)\|\boldsymbol{\alpha}'(t_i^*)\|\Delta t.$$

Intuitivamente, essas aproximações melhoram quando n aumenta.

Formalmente, a massa é dada pela soma de Riemann

$$M = \int_a^b \rho(\boldsymbol{\alpha}(t))\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\big(\boldsymbol{\alpha}(t_i^*)\big)\|\boldsymbol{\alpha}'(t_i^*)\|\Delta t.$$

se o limite existir.

Integral com Respeito ao Comprimento de Arco

De um modo mais geral, definimos a integral de linha com respeito ao comprimento de arco, como segue:

Definição 1 (Integral com Respeito ao Comprimento de Arco)

Seja $\varphi : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar contínuo sobre um caminho $\mathcal{C} \subseteq S$ definido por uma curva suave $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. A **integral de linha de φ com respeito ao comprimento de arco ao longo de $\mathcal{C}$** é

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi ds = \int_a^b \varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt,$$

se a integral da direita existir.

Se $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$, então $\mathcal{C}$ é dita uma curva fechada e denotamos a integral de linha por $\oint_{\mathcal{C}} \varphi ds$.

Relação entre as Integrais de Linha

Sejam $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial contínuo e $\mathcal{C}$ um caminho em S definido por uma curva suave regular $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Defina $\mathbf{T} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ como sendo o vetor tangente unitário à curva $\boldsymbol{\alpha}$ em t, isto é, $\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} &= \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) dt = \int_a^b \big(\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)\big) \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt = \int_{\mathcal{C}} \varphi ds,\end{aligned}$$

em que φ é o campo escalar dado por $\varphi(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)$.

Quando $\mathbf{f}$ é um campo de velocidades, a integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds$ é chamada fluxo de $\mathbf{f}$ ao longo de $\mathcal{C}$. Quando $\mathcal{C}$ é uma curva fechada, a integral é chamada circulação de $\mathbf{f}$ ao longo de $\mathcal{C}$.

Centro de Massa

A massa de um fio com densidade variável ρ que descreve um caminho $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^3$, é dada por

$$M = \int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z) ds.$$

O centro de massa do fio é um ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dado por

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} x\rho(x, y, z) ds, \\
\bar{y} &= \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} y\rho(x, y, z) ds, \\
\bar{z} &= \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} z\rho(x, y, z) ds.
\end{aligned}$$

A densidade é dita uniforme se ρ é constante. Nesse caso, o centro de massa é também chamado centroide.

Exemplo 2

Determine a massa de uma bobina de mola descrita por

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k},$$

cuja densidade em (x, y, z) é $x^2 + y^2 + z^2$. Calcule também a coordenada $\bar{z}$ do seu centro de massa.

Exemplo 2

Determine a massa de uma bobina de mola descrita por

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k},$$

cuja densidade em (x, y, z) é $x^2 + y^2 + z^2$. Calcule também a coordenada $\bar{z}$ do seu centro de massa.

Resposta: A massa M da bobina e a coordenada $\bar{z}$ do centro de massa são:

$$M = b\sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right),$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{M} b\sqrt{a^2 + b^2}(2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 b^2).$$

Momento de Inércia

As integrais de linha com respeito ao comprimento de arco também podem ser usadas para determinar o momento de inércia.

Seja $\delta(x, y, z)$ a distância perpendicular de um ponto $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ à um eixo L. Nesse caso, o momento de inércia I_L é dado por

$$I_L = \int_{\mathcal{C}} \delta^2(x, y, z)\rho(x, y, z)ds,$$

em que $\rho(x, y, z)$ denota a densidade em (x, y, z).

Os momentos de inércia com respeito aos eixos coordenados são denotados por I_x, I_y e I_z.

Exemplo 3

Determine o momento de inércia I_z de uma bobina de mola descrita por

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k},$$

cuja densidade em (x, y, z) é $x^2 + y^2 + z^2$.

Exemplo 3

Determine o momento de inércia I_z de uma bobina de mola descrita por

$$\alpha(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k},$$

cuja densidade em (x, y, z) é $x^2 + y^2 + z^2$.

Resposta: Temos que

$$I_z = Ma^2,$$

em que M é a massa determinada no Exemplo 2.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de integral de linha com respeito ao comprimento de arco.

Aplicações dessas integrais incluem densidade de massa, centro de massa e momentos de inércia.

Muito grato pela atenção!