Cálculo II (Cursão)

Aula 12 – Integrais de Linha.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

As integrais de linha tem papel importante tanto do ponto de vista teórico como prático. Suas aplicações incluem: trabalho, energia potencial, fluxo de calor, mudança de entropia e muitas outras situações em que o comportamento de um campo vetorial ou campo escalar é estudado ao longo de uma curva.

Visão Geral:

As integrais de linha são semelhantes à integral unidimensional mas, em vez de integrar sobre um intervalo $[a, b]$, integramos sobre uma curva C.

Vamos relembrar o conceito de curva parametrizável apresentado na Aula 1.

Definição 1 (Curva Parametrizável Contínua)

Uma curva parametrizável contínua é uma função contínua $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$, em que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, tal que

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad \forall t \in I.$$

Chamaremos de **caminho** o gráfico de uma curva parametrizável.

Dizemos que a curva $\boldsymbol{\alpha}$ é **suave**, ou *lisa*, se as componentes $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ são funções com derivada contínua em I.

Uma curva $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ é chamada **suave por partes** se I pode ser particionado num número finito de subintervalos nos quais $\boldsymbol{\alpha}$ é suave.

Uma curva suave $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ é dita regular se $\alpha'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ para todo $t \in I$.

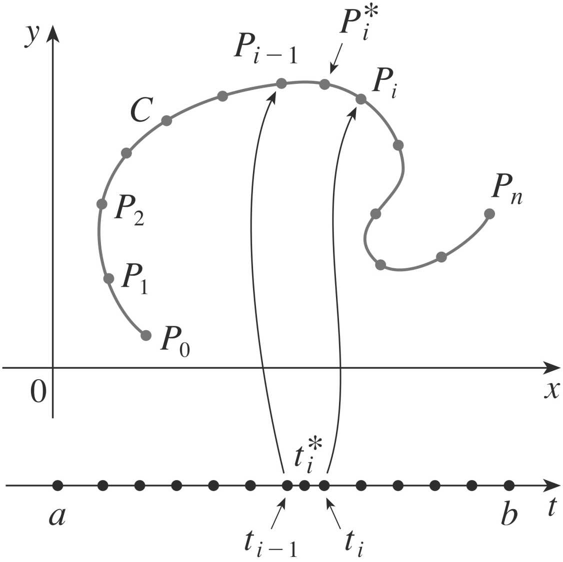
Trabalho

Considere um campo de força **f** (campo vetorial) contínuo e uma curva suave $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ que descreve um caminho $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^2$.

Vamos determinar o trabalho realizado ao mover a particular ao longo do caminho $\mathcal{C}$.

Primeiramente, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de tamanho igual Δt e tomamos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$.

Os pontos $P_i = (x_i, y_i)$ dividem $\mathcal{C}$ em n subarcos e o vetor que liga os pontos P_{i-1} e P_i é dado pela diferença $\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})$.



(Figura extraída do livro de James Stewart, Calculus, 5 edição.)

Pelo teorema do valor médio, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\boldsymbol{\alpha}'(t_i^*)\Delta t = \boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1}).$$

O trabalho realizado pela força **f** para mover a particular de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{f}\big(\boldsymbol{\alpha}(t_i^*)\big) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t_i^*)\Delta t.$$

O trabalho total executado é aproximadamente

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}\big(\boldsymbol{\alpha}(t_i^*)\big) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t_i^*)\Delta t.$$

Intuitivamente, essas aproximações melhoram quando n aumenta.

Formalmente, definimos o trabalho feito por um campo de força $\mathbf{f}$ como o limite da soma de Riemann acima, ou seja,

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}\big(\alpha(t_i^*)\big) \cdot \alpha'(t_i^*)\Delta t = \int_C \mathbf{f}\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)dt = \int_C \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}.$$

Veja na seção 10.6 do livro do Apostol mais exemplos do trabalho como uma integral de linha.

Integral de Linha de Campos Vetoriais

De um modo mais geral, definimos a integral de linhas de um campo vetorial como segue:

Definição 2 (Integral de Linha de um Campo Vetorial **f**)

Seja **f** é um campo vetorial contínuo definido sobre um caminho $\mathcal{C}$ definido por uma curva suave $\alpha(t)$, para $a \leq t \leq b$. A **integral de linha de f ao longo de** $\mathcal{C}$ é

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\alpha = \int_a^b \mathbf{f}\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t) dt,$$

se a integral da direita existir.

Se $\alpha(a) = \alpha(b)$, então $\mathcal{C}$ é dita uma curva fechada e denotamos a integral de linha por $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} d\alpha$.

Integrais de Linha com Respeito à x, y e z

Considere uma curva suave $\mathcal{C}$ descrita por

$$\alpha(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

e suponha que

$$\mathbf{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

A integral de linha do campo vetorial $\mathbf{f}$ pode ser escrita como

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\alpha = \int_{\mathcal{C}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

em que

$$\int_{\mathcal{C}} P(x, y, z)dx, \quad \int_{\mathcal{C}} Q(x, y, z)dy \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} R(x, y, z)dz,$$

são chamadas **integrais de linha ao longo do caminho $\mathcal{C}$ com relação a x, y e z**, respectivamente.

Propriedades da Integral de Linha

As integrais de linha, sendo definidas por uma integral usual, satisfazem as seguintes propriedades:

- **Linearidade:** Dados escalares a e b e campos vetoriais $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, tem-se:

$$\int_{\mathcal{C}} (a\mathbf{f} + b\mathbf{g}) \cdot d\boldsymbol{\alpha} = a \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} + b \int_{\mathcal{C}} \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\alpha}.$$

- **Aditividade:** Se a curva $\mathcal{C}$ pode ser dividida em duas curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, descritas respectivamente por $\boldsymbol{\alpha}_1$ e $\boldsymbol{\alpha}_2$, então:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_1 + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_2.$$

Exemplo 3

Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$\mathbf{f}(x, y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + (x^3 + y)\mathbf{j},$$

de $(0, 0)$ à $(1, 1)$ considerando:

(a) A curva suave $\mathcal{C}_1$ dada por

$$\alpha_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(b) A curva suave $\mathcal{C}_2$ dada por

$$\alpha_2(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(c) A curva suave $\mathcal{C}_3$ dada por

$$\alpha_3(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Resposta: Temos que

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{f} \cdot d\alpha_1 = \frac{17}{12},$$

enquanto que

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_2 = \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{59}{42}.$$

Note que a integral de linha depende da curva suave $\mathcal{C}$ mas não de sua parametrização.

Vamos mostrar que a integral de linha não depende da parametrização do caminho.

Definição 4 (Curvas Equivalentes)

Duas curvas $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ são equivalentes se existe uma função diferenciável $u : [c,d] \to [a,b]$, com $u'(t) \neq 0$ para todo $c < t < d$, tal que

$$\beta(t) = \alpha\big(u(t)\big), \quad \forall c \leq t \leq d.$$

Nesse caso, u é chamada mudança de parâmetro e o gráfico de α e β coincidem.

- Se $u'(t) > 0$ para todo $t \in (c,d)$, então α e β possuem a mesma orientação.
- Se $u'(t) < 0$ para todo $t \in (c,d)$, então α e β possuem a orientações opostas.

Exemplo 5

Mostre que as curvas

$$\alpha_2(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e

$$\alpha_3(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

do exemplo anterior são equivalentes e possuem a mesma orientação.

Exemplo 5

Mostre que as curvas

$$\alpha_2(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

e

$$\alpha_3(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

do exemplo anterior são equivalentes e possuem a mesma orientação.

Resposta: Com efeito, considere $u(t) = t^2$. Note que $u'(t) = 2t > 0$ para todo $t \in (0, 1)$. Sobretudo, temos que

$$\alpha_3(u(t)) = (u(t))\mathbf{i} + (u(t))^{3/2}\mathbf{j} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} = \alpha_2(t).$$

Teorema 6 (Mudança de Parametrização em Integrais de Linha)

Sejam $\mathbf{f}$ *um campo vetorial e* $\boldsymbol{\alpha}$ *e* $\boldsymbol{\beta}$ *duas curvas suaves equivalentes que descrevem um caminho* $\mathcal{C}$*.*

- *Se* $\boldsymbol{\alpha}$ *e* $\boldsymbol{\beta}$ *possuem a mesma orientação, então*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}.$$

- *Se* β *e* $\boldsymbol{\beta}$ *possuem orientações opostas, então*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\beta}.$$

Demonstração do Teorema 6

Vamos mostrar apenas o caso quando α e β possuem a mesma orientação.

Pela regra da cadeia, temos

$$\beta'(t) = \alpha'(u(t))u'(t).$$

Logo, temos

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\beta = \int_c^d f(\beta(t)) \cdot \beta'(t)dt = \int_c^d f(\alpha(u(t))) \cdot \alpha'(t)u'(t)dt.$$

Tomando $\tau = u(t)$, obtemos $d\tau = u'(t)dt$, $a = u(c)$ e $b = u(d)$. Logo,

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\beta = \int_a^b f(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)d\tau = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot \alpha.$$

$\square$

Considerações Finais

Na aula de hoje, usamos o conceito de trabalho para introduzir as integrais de linha de um campo vetorial.

Aplicações das integrais de linha incluem trabalho, energia potencial, fluxo de calor, mudança de entropia, dentre muitas outras.

Na aula de hoje comentamos sobre caminhos equivalentes e mudança de parâmetro. Mostramos que a integral de linha não depende da parametrização de um caminho.

Muito grato pela atenção!