Cálculo II (Cursão)

Aula 10 – Teorema do Valor Extremo e o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Nas aulas anteriores, apresentamos os conceitos de ponto estacionário, máximo, mínimo e ponto de sele.

Vimos também, como classificar um ponto estacionário de um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem contínuas usando a matriz Hessiana.

Na aula de hoje, focaremos nossa atenção para o caso em que o campo escalar está definido num conjunto fechado e limitado.

Particular atenção será dada quando o conjunto de soluções for definido pelas intersecção de conjuntos de níveis de campos escalares diferenciáveis.

Teorema do Valor Extremo

Teorema 1 (Teorema do Valor Extremo)

Se $f : S \to \mathbb{R}$ é um campo escalar contínuo em um conjunto fechado e limitado $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$, então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em pontos de $\mathcal{S}$.

Observação:

Para determinar os valores extremos de uma função f em um conjunto fechado e limitado $\mathcal{S}$, deve-se:

1. Determinar os valores de f nos pontos críticos de f em $\mathcal{S}$.
2. Determinar os valores extremos de f na fronteira de $\mathcal{S}$.

O maior dos valores nos itens 1 e 2 é o valor máximo absoluto de f e o menor dos itens 1 e 2 é o mínimo absoluto de f.

Exemplo 2

Determine os valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2,$$

no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Exemplo 2

Determine os valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2,$$

no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Resposta: O valor máximo de f no disco é $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$ e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$.

Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange são usados para resolver um problema de otimização com restrições formulados como:

$$\begin{aligned} \text{minimize/maximize} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito à} \quad & g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Método dos multiplicadores de Lagrange

Um campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeito as restrições $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m < n$ admite admite valor extremo em $\mathbf{x}$ se existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}).$$

Na prática, para resolver

$$\begin{array}{rl} \text{minimize/maximize} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito à} & g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

devemos:

a) Determinar, se possível, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tais que

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_m \nabla g(\mathbf{x}), \\ g_1(\mathbf{x}) = 0, \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

b) O pontos de máximo e o mínimo de f são encontrados entre as soluções do item a).

Exemplo 3

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine as dimensões x, y e z que fornecem o volume máximo de tal caixa.

Observação

Temos um problema de maximizar o volume da caixa

$$f(x, y, z) = xyz,$$

com a restrição da área

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Exemplo 3

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine as dimensões x, y e z que fornecem o volume máximo de tal caixa.

Observação

Temos um problema de maximizar o volume da caixa

$$f(x, y, z) = xyz,$$

com a restrição da área

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Resposta: O volume máximo da caixa é obtido quando $x = 2, y = 2$ e $z = 1$.

Método de Resolução – 1

- Isolar z da equação $g(x, y, z) = k$.
- Substituir a expressão de z em f para obter uma função de duas variáveis.
- Determinar os pontos para os quais $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.
- Verificar que o ponto é um máximo/mínimo usando o teste da segunda derivada.

Método dos Multiplicadores de Lagrange

- Resolver o sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} yz = \lambda(y + 2z) \\ xz = \lambda(x + 2z) \\ xy = \lambda(2x + 2y) \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases}$$

- Determinar o valor extremo de f na solução do sistema de equações não-lineares.

Exemplo 4

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 4

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: O valor máximo é

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 + \sqrt{29}$$

Considerações Finais

Na aula de hoje destacamos que se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar contínuo e S é fechado e limitado, então f admite máximo e mínimo globais em S.

Se S é definido pela intersecção do conjunto de nível de campos escalares $g_1, \ldots, g_m$, especificamente,

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\mathbf{x}) = k_1, \ldots, g_m(\mathbf{x}) = k_m\},$$

então, sob certas condições, podemos determinar os extremos de f em S usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Muito grato pela atenção!