Cálculo II (Cursão)

Aula 10 – Fórmula de Taylor de Segunda Ordem.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os conceitos de ponto estacionário, máximo, mínimo e ponto de sele.

Resumidamente, dado um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável, dizemos que $\mathbf{a} \in S$ é:

- Um ponto estácionário se $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- Um mínimo local se
$$\exists r > 0 : f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r).$$
- Um máximo local se
$$\exists r > 0 : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r).$$
- Um ponto de sela se
$$\forall r > 0, \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r) : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y}).$$

Teste da Segunda Derivada

Além disso, na aula anterior apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 1 (Teste da Segunda Derivada)

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *um campo escalar com derivadas de segunda ordem contínuas numa bola aberta que contém um ponto estacionário* (a, b) *de* f*. Denote o determinante da matriz Hessiana em* (a, b) *por* D*, ou seja,*

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy}^2).$$

Nesse caso, tem-se

- *Se* $D > 0$ *e* $f_{xx}(a, b) > 0$*,* f *tem um mínimo relativo em* (a, b)*.*
- *Se* $D > 0$ *e* $f_{xx}(a, b) < 0$*,* f *tem um máximo relativo em* (a, b)*.*
- *Se* $D < 0$*, é um ponto de sela de* f*.*

Fórmula de Taylor de Segunda Ordem

Teorema 2 (Fórmula de Taylor de Segunda Ordem)

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar com derivadas de segunda ordem contínuas em uma bola aberta $\mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$ para algum $r > 0$. Se $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna tal que $\mathbf{a} + \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$, então

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{a}+\mathbf{y}) &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) y_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) y_i y_j + R_2(\mathbf{y}) \\
&= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T H(\mathbf{a}) \mathbf{y} + R_2(\mathbf{y}),
\end{aligned}
$$

em que $H(\mathbf{a})$ é a matriz Hessiana de f avaliada em $\mathbf{a}$ e o resto R_2 satisfaz

$$
\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{0}} \frac{R_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|^2} = 0.
$$

Demonstração do Teorema 2

Considere

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{y} \quad \text{e} \quad g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{y}), \quad t \in [0,1].$$

Pela regra da cadeia, como $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{y}$, tem-se

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) y_j,$$

e

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) y_j \right] y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) y_j y_i = \mathbf{y}^T H(\mathbf{a}) \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Assim, pela fórmula de Taylor de 2ª ordem de $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Calculo I), tem-se

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(h), \quad h \in (0,1).$$

Em termos de f, tem-se

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T H(\mathbf{a}+h\mathbf{y})\mathbf{y}.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T H(\mathbf{a})\mathbf{y} + R_2(\mathbf{y}),$$

em que

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{y}^T H(\mathbf{a}+h\mathbf{y})\mathbf{y} - \mathbf{y}^T H(\mathbf{a})\mathbf{y}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\right] y_i y_j. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular, concluímos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} \frac{|R_2(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{y}\|^2} &= \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} \frac{1}{2\|\mathbf{y}\|^2} \left| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) y_i y_j \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right| \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|} \frac{|y_j|}{\|\mathbf{y}\|} \\
&\leq \frac{1}{2} \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right| = 0,
\end{aligned}$$

em que a última identidade segue da continuidade das derivadas de segunda ordem de f em $\mathbf{a}$. $\square$

Num ponto estacionário, a fórmula de Taylor de 2^a ordem torna-se

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T H(\mathbf{a})\mathbf{y} + R_2(\mathbf{y}).$$

Para $\mathbf{y}$ suficientemente pequeno, $f(\mathbf{a}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{a})$ tem o mesmo sinal de $\frac{1}{2}\mathbf{y}^T H(\mathbf{a})\mathbf{y}$. Especificamente, tem-se:

Teorema 3

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em $\mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$, para algum $r > 0$, e $\mathbf{a} \in S$ é um estado estacionário de f.

- *Se todos os autovalores de $H(\mathbf{a})$ são positivos, então f tem um máximo local em $\mathbf{a}$.*
- *Se todos os autovalores de $H(\mathbf{a})$ são negativos, então f tem um mínimo local em $\mathbf{a}$.*
- *Se $H(\mathbf{a})$ tem ambos autovalores positivos e negativos, então $\mathbf{a}$ é um ponto de sele de f.*

Teste da Segunda Derivada

Teorema 4 (Teste da Segunda Derivada)

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *um campo escalar com derivadas de segunda ordem contínuas numa bola aberta que contém um ponto estacionário* (a, b) *de* f*. Denote o determinante da matriz Hessiana em* (a, b) *por* D*, ou seja,*

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy}^2).$$

Nesse caso, tem-se

- *Se* $D > 0$ *e* $f_{xx}(a, b) > 0$*,* f *tem um mínimo relativo em* (a, b)*.*
- *Se* $D > 0$ *e* $f_{xx}(a, b) < 0$*,* f *tem um máximo relativo em* (a, b)*.*
- *Se* $D < 0$*, é um ponto de sela de* f*.*

Demonstração do Teorema 4

A equação característica da matriz Hessiana $H(\mathbf{a})$ é

$$\det(\lambda I - H(\mathbf{a})) = \begin{vmatrix} \lambda - f_{xx} & -f_{xy} \\ -f_{yx} & \lambda - f_{yy} \end{vmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + D. \tag{1}$$

Logo, os autovalores de $H(\mathbf{a})$, as raízes de (1), satisfazem

$$\lambda_1 + \lambda_2 = f_{xx} + f_{yy} \quad \text{e} \quad \lambda_1\lambda_2 = D.$$

- Se $D < 0$, então λ_1 e λ_2 são não-nulos e possuem sinais opostos. Pelo teorema anterior **a** é um ponto de sela de f.
- Se $D > 0$, os autovalores são ambos não-nulos e possuem o mesmo sinal. Além disso, $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2 \geq 0$. Logo, f_{xx} e f_{yy} possuem o mesmo sinal. Como $\lambda_1 + \lambda_2 = f_{xx} + f_{yy}$, concluímos que $\lambda_1 + \lambda_2$ também possuem o mesmo sinal de f_{xx} e f_{yy}. $\square$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos a fórmula de Taylor de segunda ordem para um campo escalar f com derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

Mostramos que um estacionário pode ser classificados como máximo, mínimo ou pontos de sela conforme os autovalores da matriz Hessiana.

Finalmente, no caso particular de um campo escalar em R^2, o sinal dos autovalores pode ser deduzido conhecendo o determinante da matriz Hessiana e o sinal de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Muito grato pela atenção!