Cálculo II (Cursão)

Aula 9 – Máximos, Mínimos e Pontos de Sela.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Ponto Crítico

Considere um campo escalar diferenciável $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. O plano tangente a superfície dada por $z = f(x, y)$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, com $z_0 = f(x_0, y_0)$, é definido pela equação

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Se o plano tangente é paralelo ao plano (x, y), ou seja, se

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0,$$

então dizemos que

- O ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é um **ponto estacionário** da superfície.
- O ponto (x_0, y_0), no domínio de f, é um **ponto estacionário** ou **ponto crítico** de f.

Dizemos também que (x_0, y_0) é um ponto crítico de f se pelo menos uma das derivadas parciais não existir.

Máximo, mínimo e ponto de sela

Os pontos estacionários de uma superfície são geralmente classificados como:

- **Máximo** – que pode ser interpretado como o topo de uma montanha;
- **Mínimo** – que pode ser interpretado como o fundo de um vale;
- **Ponto de Sela** – que pode ser interpretado como uma passagem entre montanhas.

Formalmente, temos as seguintes definições para um campo escalar em $\mathbb{R}^n$:

Máximo

Definição 1 (Máximo Global e Local)

Um campo escalar $f : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um **máximo absoluto** ou **máximo global** em $\mathbf{a} \in S$ se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}.$$

O valor $f(\mathbf{a})$ é o *valor máximo absoluto* de f em S.

Dizemos que $\mathbf{a} \in S$ é um **máximo relativo** ou **máximo local** de f se existe $r > 0$ tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r).$$

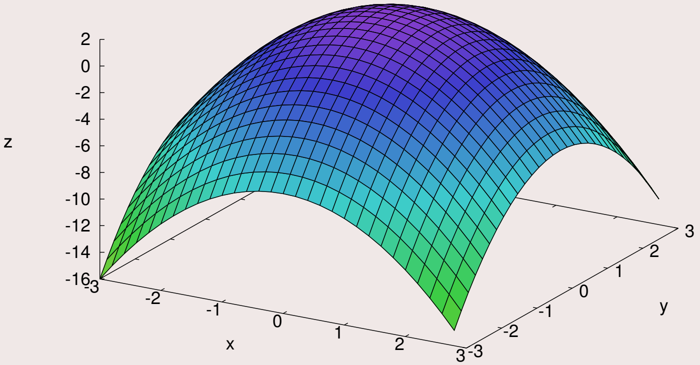
Note que o máximo relativo é o máximo na vizinhança $\mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$ de $\mathbf{a}$.

Exemplo 2

O campo escalar

$$f(x,y) = 2 - x^2 - y^2,$$

satisfaz $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2 \leq 2 = f(0,0)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é um máximo absoluto de f em $\mathbb{R}^2$.



Mínimo

Definição 3 (Mínimo Global e Local)

Um campo escalar $f : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um **mínimo absoluto** ou **mínimo global** em $\mathbf{a} \in S$ se

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}.$$

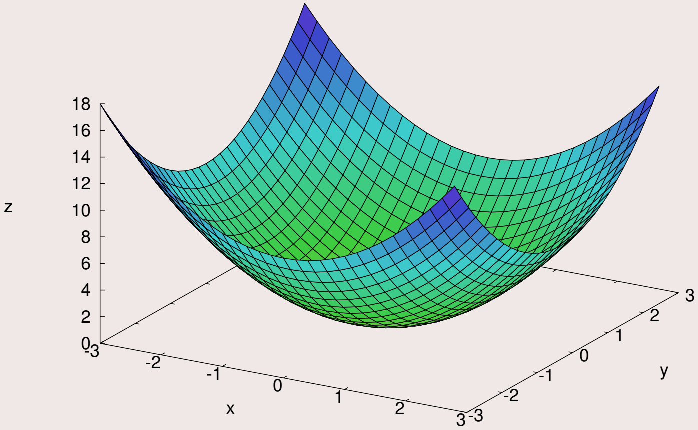
O valor $f(\mathbf{a})$ é o *valor mínimo absoluto* de f em S.

Dizemos $\mathbf{a} \in S$ é um **mínimo relativo** ou **mínimo local** de f se existe $r > 0$ tal que

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r).$$

Exemplo 4

Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.



Note que $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é um mínimo absoluto de f em $\mathbb{R}^2$.

Valor Extremo

Definição 5 (Valor Extremo)

Um número que é um máximo ou um mínimo local é chamado **extremo** de f.

Teorema 6

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{R}$ é um campo escalar diferenciável. Se $\mathbf{a} \in S$ é um extremo de f, então $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

No entanto, podemos encontrar exemplos no qual $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ mas $\mathbf{a}$ não é um extremo de f.

Ponto de Sela

Definição 7 (Pontos de Sela)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

Dizemos que $\mathbf{a} \in S$ é é um ponto estacionário de f se $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

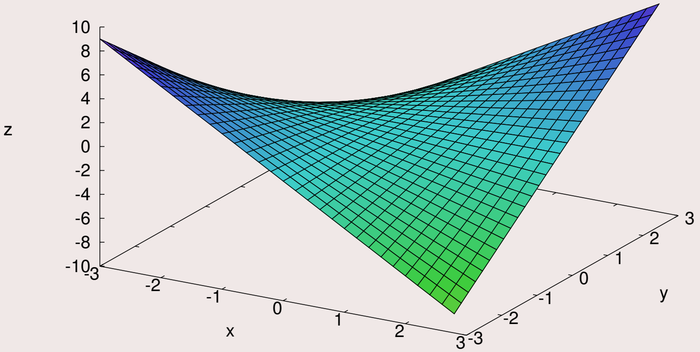
Um ponto estacionário $\mathbf{a} \in S$ é um **ponto de sela** se, para todo $r > 0$, existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$ tais que $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y})$, ou seja,

$$\forall r > 0, \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r) : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < \mathbf{y}.$$

O conceito de ponto de sela é análogo à noção de ponto de inflexão para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 8

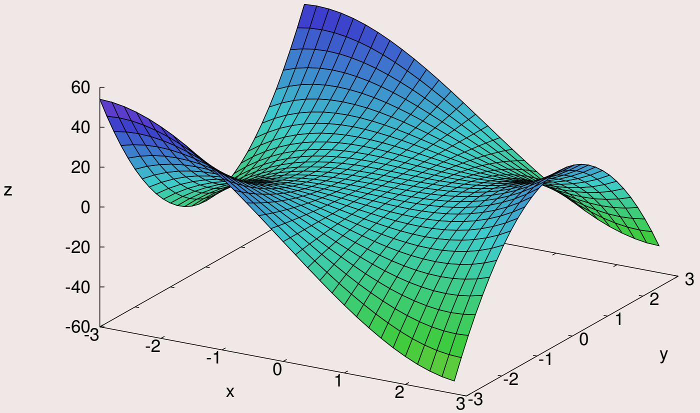
Considere o campo escalar $f(x, y) = xy$ cujo gráfico é



O gradiente de f é $\nabla f(x, y) = (y, x)$ e, portanto, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Porém, $(0, 0)$ não é um extremo de f; é um ponto de sela. Com efeito, considerando (x_1, y_1) no primeiro quadrante e (x_2, y_2) no segundo quadrante, concluímos que $f(x_2, y_2) < f(0, 0) < f(x_1, y_1)$.

Exemplo 9

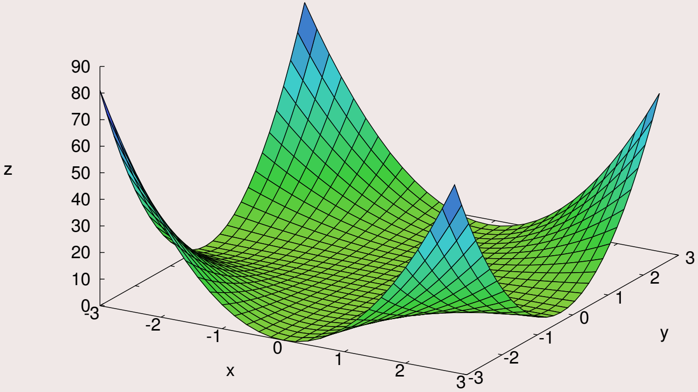
O campo escalar $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, cujo gráfico é



também possui um ponto de sela na origem.

Exemplo 10

O campo escalar $f(x, y) = x^2y^2$, cujo gráfico é



possui um mínimo absoluto na origem porque $f(x, y) \geq f(0, 0)$ para qualquer (x, y).

Matriz Hessiana

Definição 11 (Matriz Hessiana)

A matriz $n \times n$ com as derivadas de segunda ordem de um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada **matriz Hessiana** e denotada por $H(\mathbf{x})$. Formalmente, a matriz Hessiana de f em $\mathbf{x}$ é

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_{11}f(\mathbf{x}) & D_{12}f(\mathbf{x}) & \dots & D_{1n}f(\mathbf{x}) \\ D_{21}f(\mathbf{x}) & D_{22}f(\mathbf{x}) & \dots & D_{2n}f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(\mathbf{x}) & D_{n2}f(\mathbf{x}) & \dots & D_{nn}f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

se todas as derivadas parciais de segunda ordem existirem.

Exemplo 12

Determine o vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ no ponto $(0, 0)$.

Exemplo 12

Determine o vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ no ponto $(0,0)$.

Resposta:

$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(0,0) = (0,0),$$

e

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Teste da Segunda Derivada

Teorema 13 (Teste da Segunda Derivada)

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar com derivadas de segunda ordem contínuas numa bola aberta que contém um ponto estacionário (a, b) de f. Denote o determinante da matriz Hessiana em (a, b) por D, ou seja,

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy}^2).$$

Nesse caso, tem-se

- *Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, f tem um mínimo relativo em (a, b).*
- *Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, f tem um máximo relativo em (a, b).*
- *Se $D < 0$, é um ponto de sela de f.*

Demonstraremos esse resultado na próxima aula!

Exemplo 14

Determine os pontos de máximo e mínimo relativos e os pontos de sela da função
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

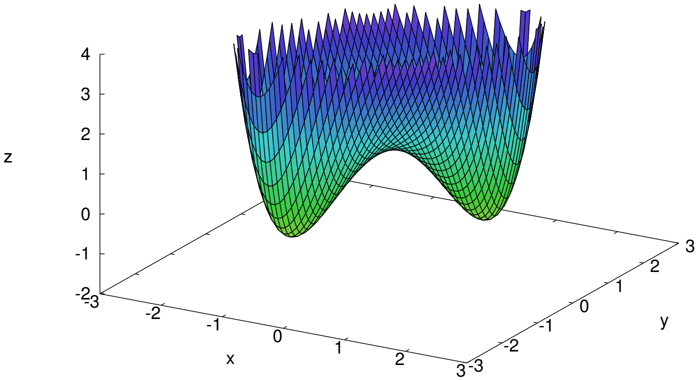
Exemplo 14

Determine os pontos de máximo e mínimo relativos e os pontos de sela da função

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Resposta: Os pontos críticos são: $(0,0), (1,1)$ e $(-1,-1)$. Aplicando o teste da segunda derivada, concluímos que $(0,0)$ é um ponto de sela quanto os outros dois são mínimos relativos.

Gráfico da função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$:



Exemplo 15

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Exemplo 15

Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Resposta: A menor distância é $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os conceitos de pontos de máximo, mínimo e pontos de sela de um campo escalar.

Vimos que **a** é um ponto estacionário de um campo escalar diferenciável f se $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

Sobretudo, um ponto estacionário pode, em muitos casos, ser classificados como máximo, mínimo ou pontos de sela usando o teste da segunda derivada.

Muito grato pela atenção!