Cálculo II (Cursão)

Aula 8 – Derivação Implícita.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior apresentamos a regra da cadeia para campos vetoriais.

Em termos gerais, se $\mathbf{g}$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ e $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$, então $\mathbf{h}$ também é diferenciável em $\mathbf{a}$ e sua derivada total é dada pela composta

$$\mathbf{h}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}).$$

Equivalentemente, escrevendo $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ como funções de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$ como uma função de $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, temos

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

Representações Implícita e Explícita

Algumas superfícies em $\mathbb{R}^3$ podem ser descritas por uma equação da forma

$$F(x,y,z) = 0, \tag{1}$$

chamada **representação implícita** da superfície. Nesse caso, a superfície é formalmente o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}.$$

Alternativamente, a **representação explícita** de uma superfície é

$$z = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Nesse caso, a superfície é o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in \mathcal{D}\}.$$

Algumas vezes, podemos resolver a equação $F(x,y,z) = 0$ para obter uma representação explícita para a superfície.

Exemplo 1

A representação implícita da esfera de raio 1 é obtida considerando

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

A representação explícita admite duas soluções:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in \mathcal{D},$$

em que $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. As duas soluções acima representam os hemisférios norte e sul, respectivamente.

Apesar de não ser possível, ou fácil, obter a representação explícita $z = f(x,y)$, usando a regra da cadeia, podemos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a partir da representação implícita.

Derivação Implícita

Com efeito, suponha que $z = f(x,y)$ em que z satisfaz a equação implícita $F(x,y,z) = 0$.

Agora, considerando

$$g(x,y) = F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D},$$

pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Analogamente, a derivada parcial de f com respeito à y é

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Exemplo 2

Considere a superfície dada por

$$y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0.$$

Determine c tal que $z = f(0, e) = 2$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $(x, y) = (0, e)$.

Exemplo 2

Considere a superfície dada por

$$y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0.$$

Determine c tal que $z = f(0, e) = 2$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $(x, y) = (0, e)$.

Resposta: Temos que $c = 4$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{e^2 - 4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2e}{e^2 - 4}.$$

No caso mais geral, temos:

Teorema 3 (Derivação Implícita)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e $F : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável. Suponha que

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0,$$

define x_{n+1} implicitamente como uma função de $x_1, x_2, \dots, x_n$, isto é, existe $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}.$$

Se $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \neq 0$, vale em $\big(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big)$ a identidade

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}}.$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para obter informações sobre a curva obtida pela intersecção de duas superfícies.

Especificamente, suponha que conhecemos a representação implícita

$$F(x,y,z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = 0,$$

de duas superfícies que intersectam numa curva $\mathcal{C}$.

Vamos admitir que podemos obter uma representação paramétrica de $\mathcal{C}$ resolvendo ambas equações em termos da variável z:

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = X(z), y = Y(z), z \in (a,b)\}.$$

Aplicando a regra da cadeia em

$$f(z) = F(X(z),Y(z),z) = 0 \quad \text{e} \quad g(z) = G(X(z),Y(z),z) = 0,$$

obtemos um sistema linear em $X'(z)$ e $Y'(z)$.

Usando a regra de Cramer, concluímos que

$$X'(z) = -\frac{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad Y'(z) = -\frac{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}}$$

Os determinantes acima são chamados **determinantes Jaconianos.** Formalmente, o **determinante Jacobiano** é

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

Eliminando y das equações

$$z = f(x,y) \quad \text{e} \quad g(x,y) = 0,$$

obtemos $z = h(x)$. Expresse $h'(x)$ usando as derivadas parciais de f e g.

Exemplo 4

Eliminando y das equações

$$z = f(x, y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = 0,$$

obtemos $z = h(x)$. Expresse $h'(x)$ usando as derivadas parciais de f e g.

Resposta: Suponha que $g(x, y) = 0$ fornece $y = Y(x)$. Aplicando a regra da cadeia em $G(x) = g(x, Y(x))$, obtemos

$$Y'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

Analogamente, aplicando a regra da cadeia em $h(x) = f(x, Y(x))$, obtemos

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial (f,g)}{\partial (x,y)}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

Exemplo 5

As equações

$$2x = v^2 - u^2 \quad \text{e} \quad y = uv,$$

definem u e v como funções de x e y. Determine as derivadas parciais de u e v com respeito à x e y.

Exemplo 5

As equações

$$2x = v^2 - u^2 \quad \text{e} \quad y = uv,$$

definem u e v como funções de x e y. Determine as derivadas parciais de u e v com respeito à x e y.

Resposta: Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

Exemplo 6

Quando u é eliminado das equações $x = u + v$ e $y = uv^2$, obtemos uma equação da forma $F(x, y, v) = 0$ que define v implicitamente como uma função de x e y, digamos $v = h(x, y)$. Mostre que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x, y)}{3h(x, y) - 2x}.$$

Exemplo 7

A equação $F(x, y, z) = 0$ define z implicitamente como uma função de x e y, digamos $z = f(x, y)$. Assumindo que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}$, mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}.$$

Considerações Finais

Uma superfície pode ser expressa na forma explícita ou implícita.

Na aula de hoje aplicamos a regra da cadeia para deduzir fórmulas para a derivação implícita. Nesse caso, podemos calcular as derivadas parciais de uma função usando sua representação implícita.

Vimos também que o mesmo raciocínio pode ser usado para determinar as derivadas de uma curva definida pela intersecção de duas superfícies expressas na representação implícita.

Muito grato pela atenção!