Cálculo II (Cursão)

Aula 7 – Campos Vetoriais Diferenciáveis e a Regra da Cadeia.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Campo Vetorial Diferenciável

Na aula anterior apresentamos os conceitos de derivada e diferenciabilidade de um campo vetorial $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Resumidamente, um campo vetorial $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ se

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{v}) + \mathbf{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{0},$$

em que $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ é uma transformação linear chamada derivada total de $\mathbf{f}$ e cuja representação matricial é a matriz Jacobiana:

$$J(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

Mostre que o campo vetorial

$$\mathbf{f}(x, y) = (xy, x^2 + y^2),$$

é diferenciável em um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário.

Exemplo 1

Mostre que o campo vetorial

$$\mathbf{f}(x,y) = (xy, x^2+y^2),$$

é diferenciável em um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário.

Resposta: Dado um vetor $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}((a,b)+(u,v)) &= ((a+u)(b+v), (a+u)^2+(b+v)^2) \\
&= (ab+av+bu+uv, a^2+2au+u^2+b^2+2bv+v^2) \\
&= \underbrace{(ab, a^2+b^2)}_{\mathbf{f}(a,b)} + \underbrace{(bu+av, 2au+2bv)}_{\mathbf{f}'(a,b)(u,v)} + \underbrace{(uv, u^2+v^2)}_{\mathbf{R}_{(a,b)}(u,v)}.
\end{aligned}$$

em que, tomando $u = r\cos\theta$ e $v = r \operatorname{sen}\theta$, temos

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\|\mathbf{R}_{(a,b)}(u,v)\|}{\|(u,v)\|} = \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{r^4(\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + 1)}}{|r|} = 0.$$

Teorema 2 (Desigualdade da Derivada Total)

Se um campo vetorial $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é diferenciável em* $\mathbf{a} \in int(S)$*, então sua derivada total* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ *satisfaz a seguinte desigualdade para qualquer* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{v})\| \leq M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})\|\mathbf{v}\|, \quad \textit{em que} \quad M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{a})\|.$$

Demonstração.

Pelas desigualdades triangular e Cauchy-Schwarz, tem-se:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{v})\| &= \|(\nabla f_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}, \nabla f_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}, \ldots, \nabla f_m(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v})\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{a})\|\|\mathbf{v}\| = M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})\|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Teorema 3 (Regra da Cadeia)

Sejam $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{g}$ *campos vetoriais tais que a composta* $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *está definida numa vizinhança de* $\mathbf{a}$*. Se* $\mathbf{g}$ *é diferenciável em* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{f}$ *é diferenciável em* $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$*, então* $\mathbf{h}$ *também é diferenciável em* $\mathbf{a}$ *e sua derivada total é dada pela composta*

$$\mathbf{h}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}).$$

Na forma matricial, temos

$$D\mathbf{h}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{b}) D\mathbf{g}(\mathbf{a}), \quad \text{em que} \quad \mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

Equivalentemente, escrevendo $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, temos

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

Demostração da Regra da Cadeia

Pela definição de $\mathbf{h}$, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(\mathbf{a}+\mathbf{u}) - \mathbf{h}(\mathbf{a}) &= \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{u})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\\
&= \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})(\mathbf{v}) + \mathbf{R}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})\\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{b})(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})) + \mathbf{R}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})\\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{b})(\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{u}) + \mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})) + \mathbf{R}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})\\
&= (\mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}))(\mathbf{u}) + \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) + \mathbf{R}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}}(\mathbf{v})\\
&= (\mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}))(\mathbf{u}) + \mathbf{R}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{R}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) + \mathbf{R}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}}(\mathbf{v}).$$

Resta mostrar que

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\|\mathbf{u}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{R}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} = 0.$$

Com efeito, usando a desigualdade triangular e da derivada total, encontramos

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{h}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} &= \frac{\|\mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u}) + \mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \frac{\|\mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\| + \|\mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{u}\|} \\
&\leq M_\mathbf{f}(\mathbf{b})\frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|} \\
&= M_\mathbf{f}(\mathbf{b})\frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{u}\|} \\
&= M_\mathbf{f}(\mathbf{b})\frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}\frac{\|\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{u}) + \mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} \\
&\leq M_\mathbf{f}(\mathbf{b})\frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}\left(\frac{\|\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|}\right) \\
&\leq M_\mathbf{f}(\mathbf{b})\frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{b}^\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}\left(M_\mathbf{g}(\mathbf{a}) + \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{a}^\mathbf{g}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Suponha que a temperatura de um disco fino num ponto (x, y) é dado pelo campo escalar $f(x, y)$. Tomando

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

podemos escrever a temperatura como uma função φ de r e θ dada pela equação

$$\varphi(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Expresse as derivadas parciais de φ em termos das derivadas parciais de f. Determine também a derivada parcial de segunda ordem $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$.

Resposta: Usando a regra da cadeia, encontramos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Usando a regra da cadeia novamente, encontramos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &\quad - r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial y} - r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Considerações Finais

Na aula de hoje revisamos o conceito de diferenciabilidade de um campo vetorial e apresentamos a regra da cadeia para campos vetoriais.

Apresentamos um exemplo onde calculamos as derivadas parciais de uma função após uma mudança de coordenadas cartesianas para polares.

Na próxima aula, veremos como a regra da cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função implícita.

Muito grato pela atenção!