Cálculo II (Cursão)

Aula 6 – Regra da Cadeia para Campos Escalares. Derivada e Diferenciabilidade de Campos Vetoriais.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula de hoje apresentaremos a regra da cadeia para campo escalar e a noção de diferenciabilidade para um campo vetorial.

Lembrando, a regra da cadeia estabelece que a derivada da composta $g = f \circ r$ de funções reais satisfaz

$$g'(t) = f'(r(t))r'(t).$$

Iniciaremos estendendo a equação acima para o caso em que f é um campo escalar e $\mathbf{r}$ é uma curva diferenciável.

Regra da Cadeia

Teorema 1 (Regra da Cadeia)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{r} : I \to S$ uma curva parametrizável. Se $\mathbf{r}'(t)$ existe em $t \in I$ e f é diferenciável em $\mathbf{r}(t)$, então a derivada $g'(t)$ da composta $f \circ \mathbf{r} : I \to \mathbb{R}$, dada por $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$, existe e satisfaz

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

De forma alternativa, podemos a regra da cadeia como segue:

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}.$$

Demonstração.

Tome $\mathbf{a} = \mathbf{r}(t) \in S$. Sendo S aberto, existe $h > 0$ tal que $\mathbf{r}(t+h) \in \mathcal{B}(\mathbf{a}, r) \subseteq S$ para algum $r > 0$.

Vamos escrever $\mathbf{y} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ e, assim, obtemos

$$\begin{aligned} g(t+h) - g(t) &= f(\mathbf{r}(t+h)) - f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} + R_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Agora, pela definição de derivada temos:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} + R_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})}{h} \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} \frac{\|\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)\|}{h} \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t). \end{aligned}$$

□

Derivada ao Longo de uma Curva

Se $\mathbf{r}$ define uma curva suave regular, $\mathbf{r}'$ representa a velocidade ou vetor tangente. Com base nessa observação e na regra da cadeia, temos:

Definição 2 (Derivada ao Longo de uma Curva)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{r} : I \to S$ uma curva suave regular e $f : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável. A derivada de f ao longo da curva $\mathcal{C} = \{\mathbf{r}(t) : t \in I\}$ ou na direção de $\mathcal{C}$ é

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t), \quad \text{em que} \quad \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

denota o vetor tangente unitário a curva $\mathcal{C}$ no ponto $\mathbf{r}(t)$.

Exemplo 3

Encontre a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 - 3xy$ ao longo da parábola $y = x^2 - x + 2$ no ponto $P = (1,2)$.

Exemplo 3

Encontre a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 - 3xy$ ao longo da parábola $y = x^2 - x + 2$ no ponto $P = (1, 2)$.

Resposta: A derivada direcional de f ao longo da parábola é

$$\nabla f(\mathbf{r}(1)) \cdot \mathbf{T}(1) = (-4, -4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Curvas e Conjuntos de Níveis

Definição 4 (Conjunto de Nível)

Se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar. Um conjunto de nível de f é

$$L(c) = \{\mathbf{x} \in S : f(\mathbf{x}) = c\},$$

para alguma constante c.

- Em $\mathbb{R}^2$, $L(c)$ é chamado **curva de nível**.
- Em $\mathbb{R}^3$, $L(c)$ é uma **superfície de nível**.

Vetor Gradiente e Conjuntos de Níveis

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

Dado $\mathbf{a} \in S$, considere $c = f(\mathbf{a})$ e o conjunto de nível $L(c)$.

Seja $\mathbf{r} : I \to L(c)$ uma curva diferenciável em $L(c)$ que passa pelo ponto $\mathbf{a} \in S$, ou seja,

$$f(\mathbf{r}(t)) = c, \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \exists t_0 \in I : \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{a}.$$

Pela regra da cadeia, a derivada de f ao longo da curva $\mathbf{r}$ em $\mathbf{a}$ satisfaz

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

pois $g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = c$ para todo $t \in I$.

Logo, $\nabla f(\mathbf{a})$ é perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$.

Como esse resultado vale para qualquer curva em $L(c)$ que passa por $\mathbf{a}$, os vetores tangentes são todos ortogonais à $\nabla f(\mathbf{a})$.

Portanto, se $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, então o gradiente é ortogonal ao plano tangente à f em $\mathbf{a}$.

Em termos matemáticos, o plano tangente à f em $\mathbf{a}$ satisfaz

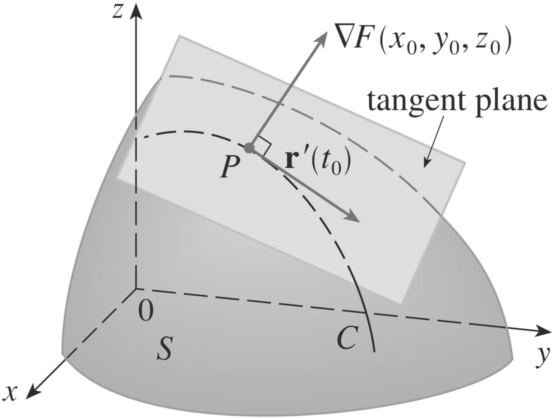
$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0.$$

Além disso, a reta normal a superfície $f(\mathbf{x}) = k$ em $\mathbf{a}$ satisfaz

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \lambda \nabla f(\mathbf{a}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5

O vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de $F(x, y, z) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$.



Derivada de um Campo Vetorial

Conforme mencionado na Aula 3, a derivada de um campo vetorial é definida derivando suas componentes, que são campos escalares.

Formalmente, um campo vetorial $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k, \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

em que $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ denotam os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^m$.

Desa forma, a derivada do campo vetorial $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(S)$ com respeito à $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definida por:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}; \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(\mathbf{a}; \mathbf{y})\mathbf{e}_k,$$

se a derivada $f_k'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ de todas as componentes f_k's de $\mathbf{f}$ existirem.

Equivalentemente, temos:

Definição 6 (Derivada de um Campo Vetorial)

Seja $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial. A derivada de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ com respeito à $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a};\mathbf{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h},$$

se o limite existir.

Note que

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}'(\mathbf{a};\mathbf{y}) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{a}+h\mathbf{y})\mathbf{e}_k - \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{a})\mathbf{e}_k}{h}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_k(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{a})}{h} \right) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} f_k'(\mathbf{a};\mathbf{y})\mathbf{e}_k.
\end{aligned}$$

Campo Vetorial Diferenciável

Definição 7 (Campo Vetorial Diferenciável)

Um campo vetorial $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ se existe uma transformação linear $\mathbf{T_a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um campo vetorial $\mathbf{R_a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{T_a}(\mathbf{v}) + \mathbf{R_a}(\mathbf{v}) \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R_a}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Nesse caso $\mathbf{T_a}$ é chamada derivada total de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$ e denotada por $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$, o campo vetorial $\mathbf{R_a}$ é o resto. Além disso, (1) é a fórmula de Taylor de primeira ordem de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$

Matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana de **f** em **a** é a matriz formada pelas derivadas parciais de **f** em **a**:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \dots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, temos

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Teorema 8

Se $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é um campo vetorial diferenciável em* $\mathbf{a} \in int(S)$ *com derivada total* $\mathbf{T_a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, então* $\mathbf{f}'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ *existe para qualquer* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *e satisfaz*

$$\mathbf{T_a}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a}; \mathbf{y}).$$

Além disso, tem-se

$$\mathbf{T_a}(\mathbf{y}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja, a matriz Jacobiana é a matriz da transformação linear $\mathbf{T_a}$*.*

Demonstração.

Temos que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a};\mathbf{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{T}_{\mathbf{a}}(h\mathbf{y})) + \mathbf{R}_{\mathbf{a}}(h\mathbf{y})}{h}$$

$$= \mathbf{T}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) + \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{a}}(h\mathbf{y})}{\|h\mathbf{y}\|}\frac{\|h\mathbf{y}\|}{h} = \mathbf{T}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}).$$

Finalmente, temos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a};\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(\mathbf{a};\mathbf{y})\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{m} (\nabla f_k(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})\,\mathbf{e}_k$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \mathbf{y} = D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{y}.$$

Diferenciabilidade $\Longrightarrow$ Continuidade

Teorema 9 (Diferenciabilidade Implica Continuidade)

Se um campo vetorial $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é diferenciável em* $\mathbf{a} \in int(S)$, *então* $\mathbf{f}$ *é contínua em* $\mathbf{a}$.

Demonstração.

Com efeito, tem-se:

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \left(\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{T}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| \right) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

$\square$

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos a regra da cadeia para a composição de um campo escalar com uma curva diferenciável.

Destacamos que o vetor gradiente é ortogonal ao plano tangente à uma superfície de nível.

Posteriormente, apresentamos os conceitos de derivada e diferenciabilidade de um campo vetorial $\mathbf{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Finalmente, mostramos que a diferenciabilidade implica continuidade de um campo vetorial.

Muito grato pela atenção!