Cálculo II (Cursão)

Aula 5 – Funções Diferenciáveis e o Vetor Gradiente.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

No curso de Cálculo I, vimos que se uma função $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in S$, então f é contínua em a. Lembre-se que uma função f é diferenciável em a se derivada $f'(a)$ existe.

A existência das derivadas direcionais $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$, incluindo as derivadas parciais, contudo, não implicam a continuidade de um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{a} \subseteq S$.

Exemplo 1

Considere o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ existe em $\mathbf{a} = (0,0)$ para qualquer $\mathbf{y} = (a,b)$ mas f não é contínua em $(0,0)$.

Exemplo 1

Considere o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ existe em $\mathbf{a} = (0,0)$ para qualquer $\mathbf{y} = (a,b)$ mas f não é contínua em $(0,0)$.

Resposta: Tomando $\mathbf{a} = (0,0)$ e $\mathbf{y} = (a,b)$, encontramos

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{b^2}{a}, & b \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

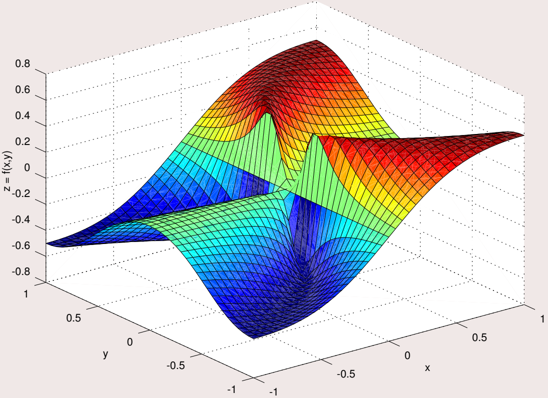
Mostramos que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe considerando

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}.$$

Exemplo 2

A figura abaixo ilustra o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Diferenciabilidade e Derivada Total

Definição 3 (Função Diferenciável e Derivada Total)

Um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ se existem uma transformação linear $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um campo escalar $R_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0. \tag{1}$$

Dizemos que f é diferenciável em S se f é derivável em todos os pontos de S.

A transformação linear $T_{\mathbf{a}}$ é chamada derivada total de f.

O Apostol define $E(\mathbf{a},\mathbf{v}) = R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\|$.

Fórmula de Taylor de Primeira Ordem

A equação

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

é a fórmula de Taylor de primeira ordem de f em $\mathbf{a}$. O termo

$$R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - \big(f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})\big),$$

denota o resto da aproximação de f por $f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}$.

O limite

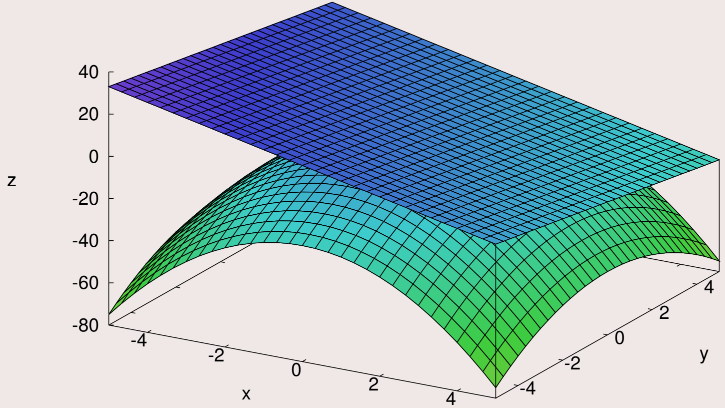
$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0$$

significa que $R_{\mathbf{a}} \to 0$ mais rápido que $\|\mathbf{v}\| \to 0$ quando $\mathbf{v} \to 0$.

Logo, se f é diferenciável em $\mathbf{a}$, então $f(\mathbf{a}+\mathbf{v})$ pode ser aproximado por $f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ para $\mathbf{v}$ suficientemente próximo de $\mathbf{0}$.

Exemplo 4

A figura abaixo ilustra o campo escalar diferenciável $f(x,y) = -2x^2 - y^2$ e a transformação afim $f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}$ no ponto $\mathbf{a} = (1, 1, -3)$:



Caracterização da Derivada Total

O seguinte teorema estabelece uma relação entre a derivada total, as derivadas direcionais e parciais de um campo escalar.

Teorema 5 (Caracterização da Derivada Total)

Se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $\mathbf{a} \in int(S)$ *com derivada total* $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *então* $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ *existe para todo* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *e*

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{y}) = T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}).$$

Sobretudo, tem-se

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} y_k D_k f(\mathbf{a}) = \big(D_1 f(\mathbf{a}), \ldots, D_n f(\mathbf{a})\big) \cdot \mathbf{y}.$$

Gradiente

Definição 6 (Gradiente)

O gradiente de um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotado por ∇f ou **grad** f, é o campo vetorial cujas componentes são as derivadas parciais de f, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

O gradiente está definido em um ponto $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ se e somente se todas as derivadas parciais de f existem em $\mathbf{a}$!

Escrevemos a fórmula de Taylor como segue usando o gradiente:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

Interpretação Geométrica do Gradiente

Seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário, isto é, $\|\mathbf{u}\| = 1$. A derivada direcional de f em $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{u}$ satisfaz

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \theta,$$

em que θ é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\nabla f(\mathbf{a})$.

Note que $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$ é máximo se $\cos \theta = 1$, ou seja, quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção de $\nabla f(\mathbf{a})$. Em outras palavras, o campo escalar tem a maior taxa de variação na direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$.

Além disso, a taxa de variação máxima é igual à magnitude do gradiente.

Por outro lado, tem-se $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = 0$ se $\mathbf{u}$ é ortogonal à $\nabla f(\mathbf{a})$.

Diferenciabilidade e Continuidade

O seguinte teorema revela que diferenciabilidade implica continuidade:

Teorema 7 (Diferenciabilidade $\Longrightarrow$ Continuidade)

Se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in int(S)$, então f é contínua em $\mathbf{a}$.

Demonstração.

Com efeito, se f é diferenciável em $\mathbf{a}$ então

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\| \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

Logo, temos

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

$\square$

Condição Suficiente para Diferenciabilidade

O seguinte conceito, que está fundamentado na existência e continuidade das derivadas parciais, fornece condições suficientes para a diferenciabilidade:

Definição 8 (Continuamente Diferenciável)

Um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dito continuamente diferenciável em $\mathbf{a}$ se suas derivadas parciais existem em uma bola $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$, $r > 0$, e são contínuas em $\mathbf{a}$.

Dizemos que f é continuamente diferenciável, e escrevemos $f \in \mathcal{C}^1$, se f é continuamente diferenciável em todo $\mathbf{a} \in S$.

Teorema 9 (Condição Suficiente para Diferenciabilidade)

Se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável em $\mathbf{a} \in int(S)$, então f é diferenciável em $\mathbf{a}$.

Demonstração do Teorema 9

Vamos considerar apenas o caso $n = 2$. O caso mais geral segue de um modo similar mas com uma notação mais elaborada.

Tome $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{v} = (h, k)$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{v} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}; r)$. Definia

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \\ &= f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})h - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})k. \end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tais que

$$R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 k)k - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})h - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})k.$$

Como ambas desigualdades

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1,$$

valem, usando o teorema do sanduíche e a continuidade das derivadas parciais em $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$, concluímos que

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \Bigg[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h, a_2+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\Bigg] = 0.$$

Logo, f é diferenciável em $\mathbf{a}$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos os conceitos de gradiente, função diferenciável e derivada total.

Destacamos que se f é diferenciável, então suas derivadas direcionais podem ser escritas usando o gradiente.

Mostramos que diferenciabilidade implica continuidade. Além disso, uma função é diferenciável em $\mathbf{a}$ se suas derivadas parciais existem numa bola que contém $\mathbf{a}$ e são contínuas nesse ponto.

Muito grato pela atenção!