Cálculo II (Cursão)

Aula 4 – Derivadas Direcionais e Derivadas Parciais.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, definimos a derivada de um campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ com respeito à $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ como

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h},$$

se o limite existir.

Destacamos que $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ mede a taxa de variação de f em $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{y}$. Tal medida, porém, considera a magnitude de $\mathbf{y}$.

Uma medida melhor para a taxa de variação de f em $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{y}$ é obtida considerando o vetor $\mathbf{u} = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$ no lugar de $\mathbf{y}$.

Note que $\mathbf{u}$ tem a mesma direção de $\mathbf{y}$, porém, é um vetor unitário.

Derivada Direcional

Definição 1 (Derivada Direcional)

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar, $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário, i.e., $\|\mathbf{u}\| = 1$. A derivada de f em $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{u}$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(a) \equiv f'(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h},$$

se o limite existir.

Um caso particular muito importante surge quando $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k$, em que

$$\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-ésima}}, 0, \ldots, 0),$$

denota o k-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, temos as chamadas **derivadas parciais** de f em $\mathbf{a}$.

Derivadas Parciais

Definição 2 (Derivada Parcial em **a**)

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior de S. A **derivada parcial** de f em relação a k-ésima variável independente em **a** é

$$D_k f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_k + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)}{h},$$

se o limite existir.

Observação:

Em outras palavras, $D_k f(\mathbf{a})$ é a derivada usual de f com respeito a k-ésima variável obtida considerando todas as outras variáveis como constantes.

Derivadas Parciais

Definição 3 (Derivada Parcial – Um Novo Campo Escalar)

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar. A **derivada parcial** de f em relação a k-ésima variável independente é o campo escalar

$$D_k f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h},$$

definido nos pontos $\mathbf{x} \in \text{int}(S)$ para os quais o limite existe.

Notação:

A derivada parcial de f com respeito a k-ésima variável independente é também denotada por f_{x_i} ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$.

Exemplo 4

Determine as derivadas parciais $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$ da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Exemplo 4

Determine as derivadas parciais $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$ da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Resposta:

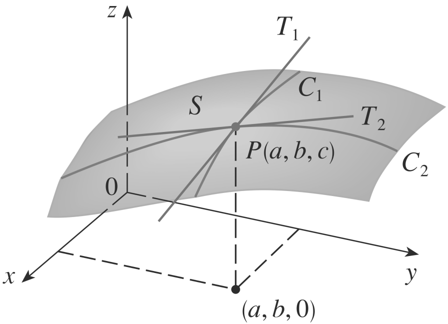
$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3, \quad f_x(2,1) = 16.$$

e

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y, \quad f_y(2,1) = 8.$$

Interpretação das Derivadas Parciais

Se f é uma função de duas variáveis, os pontos (x, y, z) tais que $z = f(x, y)$ representa uma superfície S em $\mathbb{R}^3$.



As derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ representam as inclinações das retas tangentes à superfície S em $P(a, b, c)$, com $c = f(a, b)$, com os cortes C_1 e C_2 dos planos $y = b$ e $x = a$, respectivamente.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

- As derivadas parciais $D_1 f, \ldots, D_n f$ de um campo escalar f são também campos escalares.
- As derivadas de $D_1 f, \ldots, D_n f$ são chamadas **derivadas de segunda ordem de** f. Por exemplo,

$$D_j(D_i f) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j},$$

  denota a j-ésima derivada parcial de $D_i f$.
- Derivadas de ordem superior são obtidas derivando as derivadas parciais. Por exemplo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = D_k(D_j(D_i f)) = f_{x_i x_j x_k},$$

  é uma derivada de ordem 3 de f.

Existem 4 derivadas parciais de segunda ordem para funções de duas variáveis:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemplo 5

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Existem 4 derivadas parciais de segunda ordem para funções de duas variáveis:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemplo 5

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2.$$

Resposta:

$$f_{xx} = 6x + 2y^3, \qquad f_{xy} = 6xy^2,$$
$$f_{yx} = 6xy^2, \qquad f_{yy} = 6x^2 y - 4.$$

Note que, nesse exemplo, temos $f_{xy} = f_{yx}$. Essa identidade, porém, nem sempre é verdadeira.

Exemplo 6

Calcule as derivadas mistas de segunda ordem $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$ do campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exemplo 6

Calcule as derivadas mistas de segunda ordem $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$ do campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resposta: Usando a definição de derivada parcial como um limite, concluímos que

$$f_{xy}(0,0) = -1 \quad \text{e} \quad f_{yx}(0,0) = 1.$$

Note que as derivadas mistas de segunda ordem são diferentes no ponto $(0,0)$.

Teorema de Clairaut

Teorema 7 (Condição Suficiente para Igualdade das Derivadas Parciais Mistas)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar tal que as derivadas parciais f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} existem em S. Se f_{xy} e f_{yx} são contínuas em $(a, b) \in S$, então vale a identidade

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

A demonstração desse resultado encontra-se em pp. 278-279 do Apostol.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de derivada direcional que fornece a taxa de variação, por unidade de distância, de f em $\mathbf{a}$ na direção de um vetor unitário $\mathbf{u}$, ou seja, $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Considerando $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k$, obtemos as derivadas parciais denotadas por

$$D_k f, \quad f_{x_k}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Uma derivadas parcial de ordem n de um campo escalar é obtida derivando uma derivada parcial de ordem $n-1$.

Sobretudo, de acordo com o teorema de Clairaut, tem-se a igualdade das derivadas mistas se elas forem ambas contínuas.

Muito grato pela atenção!