Cálculo II (Cursão)

Aula 3 – Limite, Continuidade e Derivada de um Campo Escalar com Respeito à um Vetor.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Na aula anterior, apresentamos o conceito de limite de campos vetoriais que pode ser formulado como segue:

Definição 1 (Limite)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^m$. Dados $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$, dizemos que o limite de $\mathbf{f}$ quando $\mathbf{x}$ tende a $\mathbf{a}$ é $\mathbf{L}$ e escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L},$$

se, e somente se,

$$\lim_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \to 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| = 0.$$

Como a definição de limite está fundamentada em um limite real, muitas propriedades de limite e continuidade de funções reais também valem para campos escalares e campos vetoriais.

Não Existência do Limite

Existem infinitas maneiras de $\mathbf{x}$ se aproximar de $\mathbf{a}$.

A noção de distância, porém, não depende da maneira como $\mathbf{x}$ se aproxima de $\mathbf{a}$.

Portanto, se o limite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existe, então $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ deve se aproximar de $\mathbf{L}$ independentemente da maneira como $\mathbf{x}$ se aproxima de $\mathbf{a}$.

Com base nessas observações, temos o seguinte resultado:

Se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}_1$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ ao longo de um caminho $\mathcal{C}_1$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}_2$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ ao longo de um caminho $\mathcal{C}_2$, com $\mathbf{L}_1 \neq \mathbf{L}_2$, então $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ não existe.

Exemplo 2

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

não existe.

Exemplo 2

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

não existe.

Resposta: Considere os caminhos

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) : y = 0\}$$

e

$$\mathcal{C}_2 = \{(x,y) : x = 0\},$$

e conclua que

$$\lim_{(x,y)\to_{\mathcal{C}_1}(0,0)} f(x,y) = 1 \quad \text{mas} \quad \lim_{(x,y)\to_{\mathcal{C}_2}(0,0)} f(x,y) = -1.$$

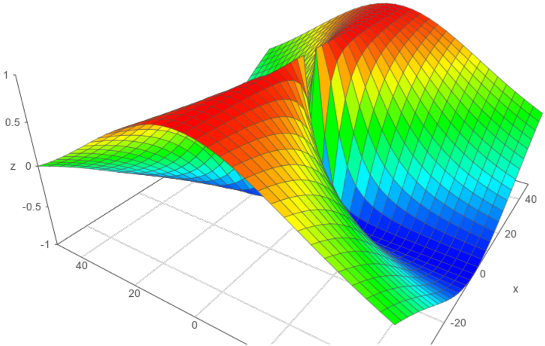
Exemplo 2

Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

não existe.

Superfície $z = f(x, y)$ em que $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.



Função Contínua

Definição 3 (Função Contínua)

Uma função $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$ se $\mathbf{f}$ está definida em $\mathbf{a}$ e

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Dizemos que $\mathbf{f}$ é contínua em S se $\mathbf{f}$ é contínua em cada ponto de S.

Interpretação:

Se $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}$ sofre uma pequena variação, o valor $f(\mathbf{a})$ também sofrerá uma pequena variação.

Em $\mathbb{R}^2$, a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Teorema 4

Um campo vetorial $\mathbf{f}$ *da forma*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})).$$

é contínuo em $\mathbf{a}$ *se, e somente se, cada uma de suas componentes* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *são campos escalares contínuos em* $\mathbf{a}$*.*

Em vista desse teorema, apresentamos principalmente exemplos de campos escalares.

Exemplo 5

Determine onde o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínuo.

Exemplo 5

Determine onde o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínuo.

Resposta: O campo escalar f é contínuo em

$$S = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\},$$

pois o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe. Com efeito, considerando os caminhos

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y) : x = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 = \{(x,y) : y = x\},$$

concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to_{\mathcal{C}_1}(0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{mas} \quad \lim_{(x,y)\to_{\mathcal{C}_2}(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}.$$

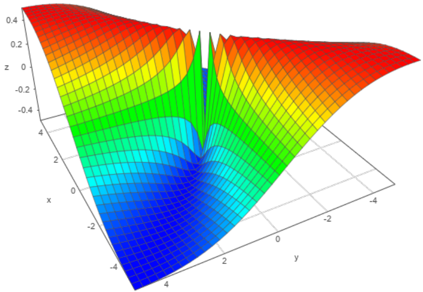
Exemplo 5

Determine onde o campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínuo.

Superfície $z = f(x,y)$ em que $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.



Composta de Funções Contínuas

Teorema 6

Sejam $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{g}$ *funções tais que a composta* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *está definida em* $\mathbf{a}$*, em que*

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x})\big).$$

Se $\mathbf{g}$ *é contínua em* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{f}$ *é contínua em* $\mathbf{g}(\mathbf{a})$*, então a composta* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *é contínua em* $\mathbf{a}$*.*

Exemplo 7

São contínuos os campos escalares

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y), \quad g(x,y) = \ln\big(\cos(x^2+y^2)\big) \quad \text{e} \quad h(x,y) = \frac{e^{x+y}}{x+y},$$

em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais estão definidos.

Derivada de um Campo Escalar

Vamos agora iniciar o estudo das derivadas de um campo escalar.

A derivada de um campo vetorial é definida derivando cada componente e serão revisadas numa aula futura.

Definição 8 (Derivada com Respeito à um Vetor)

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar, $\mathbf{a}$ um ponto interior de S e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. A derivada de f em $\mathbf{a}$ com respeito a $\mathbf{y}$ é

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h},$$

se o limite existir.

Note que $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ mede a taxa de variação de f em $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{y}$.

Exemplo 9

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear, ou seja,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcule a derivada $f'(\mathbf{a}; \mathbf{y})$ para $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 9

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear, ou seja,

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcule a derivada $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ para $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Resposta: Temos que

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}),$$

para quaisquer $\mathbf{a} \in \text{int}(S)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 10

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in int(S)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Defina a função real $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ através da equação

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{y}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se uma das derivadas $g'(t)$ ou $f'(\mathbf{a} + t\mathbf{y}; \mathbf{y})$ existe, então a outra também existe e tem-se

$$g'(t) = f'(\mathbf{a} + t\mathbf{y}; \mathbf{y}).$$

Em particular,

$$g'(0) = f'(\mathbf{a}; \mathbf{y}).$$

Exemplo 11

Calcule a derivada $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ de $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

Exemplo 11

Calcule a derivada $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ de $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

Resposta:

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{y}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}.$$

Teorema 12 (Teorema do Valor Médio)

Se $f'(\mathbf{a} + t\mathbf{y}; \mathbf{y})$ *existe para todo* $0 \leq t \leq 1$, *então existe* $\theta \in (0, 1)$ *tal que*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a} + \theta\mathbf{y}; \mathbf{y}).$$

Considerações Finais

Na aula de hoje revisamos o conceito de limite e destacamos que o limite não existe se ele for diferente sobre curvas distintas.

Apresentamos também os conceitos de função contínua e derivada de um campo escalar com respeito à um vetor.

Destacamos que a derivada $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ corresponde a taxa de variação do campo escalar f em $\mathbf{a}$ na direção do vetor $\mathbf{y}$.

Finalmente, mostramos que $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ pode ser determinada considerando a função real $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{y})$.

Muito grato pela atenção!