Cálculo II (Cursão)

Aula 2 – Conjuntos Abertos e Limite.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

No curso de Cálculo II, estudaremos funções $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é:

- Um curva parametrizável, num sentindo amplo, quando $n = 1$ e $m > 1$.
- Um **campo escalar** se $n > 1$ e $m = 1$.
- Um **campo vetorial** quando $n > 1$ e $m > 1$.

A noção de limite, usado na definição de outros conceitos como continuidade e derivada, está baseado na noção de distância e vizinhança.

O conceito de vizinhança é formalizado usando as chamadas bolas abertas.

Bola Aberta e Interior

Definição 1 (Bola Aberta)

Sejam $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ um número real positivo. A bola aberta de raio r e centro $\mathbf{a}$ é o conjunto

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}; r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}.$$

Definição 2 (Interior)

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbf{a} \in S$ é um ponto interior de S se existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(\mathbf{a}; r) \subseteq S$. O conjunto de todos os pontos interiores de S é chamado interior de S e denotado por $\text{int}(S)$.

Conjunto Aberto

A noção de vizinhança é generalizada usando o conceito de conjunto aberto.

Definição 3 (Conjunto Aberto)

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus elementos são pontos no interior de S, ou seja, S é aberto se (e somente se) $S = \text{int} S$.

Exemplo 4

Em $\mathbb{R}$, um intervalo aberto $S = (a, b)$ é um conjunto aberto. A união de conjuntos abertos é também um conjunto aberto.

Um intervalo fechado $S = [a, b]$ não é um conjunto aberto porque a e b estão em S mas não estão no interior de S.

Exemplo 5

Sejam A_1 e A_2 conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que o produto Cartesiano

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2\}.$$

é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5

Sejam A_1 e A_2 conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que o produto Cartesiano

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \in A_1 \text{ e } a_2 \in A_2\}.$$

é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

Resposta: Veja resolução nas pp. 244-245 do Apostol, vol. 2.

Exterior e Fronteira

Definição 6 (Exterior)

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto exterior de S se existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}(\mathbf{a}; r) \cap S = \emptyset$. O conjunto de todos os pontos exteriores de S é chamado exterior de S e denotado por $\text{ext}(S)$.

Definição 7 (Fronteira)

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteira de S se $\mathbf{a}$ não é ponto interior nem ponto exterior de S. O conjunto de todos os pontos fronteira de S, denotado por ∂S, é chamado fronteira de S.

Definição 8 (Limite)

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^m$. Dados $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$, dizemos que o limite de $\mathbf{f}$ quando $\mathbf{x}$ tende a $\mathbf{a}$ é $\mathbf{L}$ e escrevemos $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ ou simplesmente

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L},$$

se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in S$ e $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta$ implicam $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| \leq \epsilon$.

Equivalentemente, temos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \quad \iff \quad \lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| = 0,$$

que é um limite comum de uma função com valores reais.

Propriedades do Limite

Como a definição de limite está fundamentada em um limite real, muitas propriedades de limite e continuidade de funções reais também valem para campos escalares e campos vetoriais.

Teorema 9

Se $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ *e* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}$*, então:*

(a) $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{L} + \mathbf{M}$.

(b) $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \lambda \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{L}$*, para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}$.

(d) $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{L}\|$.

A demonstração desse resultado encontra-se na pp. 248 do Apostol, vol 2.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os conceitos de bola aberta e conjunto aberto.

Apresentamos também o conceito de limite, que pode ser formulado como um limite envolvendo quantidades reais.

Portanto, propriedades análogas valem para limites de campos escalares e vetoriais.

Muito grato pela atenção!