Cálculo II (Cursão)

Aula 1 – Curvas Parametrizáveis.

Marcos Eduardo Valle
Depart. Matemática Aplicada
IMECC – Unicamp

Introdução

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$ em geral, o produto cartesiano dos números reais cujos elementos são n-uplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

A norma de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é definida por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Exemplo 1

No $\mathbb{R}^2$, que contém pares (x, y) também denotados por $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, a norma é $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

No $\mathbb{R}^3$, que é formado por triplas (x, y, z) também denotadas por $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, tem-se $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Curvas Parametrizáveis

Definição 2 (Curva Parametrizável Contínua)

Uma curva parametrizável contínua é uma função contínua $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$, em que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, tal que

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad \forall t \in I.$$

A variável t é chamada parâmetro da curva $\boldsymbol{\alpha}$.

Dizemos que a curva $\boldsymbol{\alpha}$ é **suave** se as componentes $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ são funções com derivada contínua em I.

Observação

Dizemos que $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ é contínua se cada componente $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Exemplo 3

Esboce o gráfico da curva

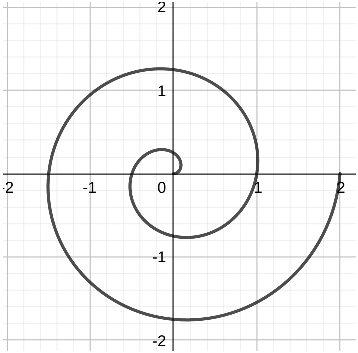
$$\alpha(t) = (t\cos(2\pi t), t\,\mathrm{sen}(2\pi t)) = t\cos(2\pi t)\mathbf{i} + t\,\mathrm{sen}(2\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2.$$

Exemplo 3

Esboce o gráfico da curva

$$\alpha(t) = (t\cos(2\pi t), t\,\text{sen}(2\pi t)) = t\cos(2\pi t)\mathbf{i} + t\,\text{sen}(2\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2.$$

Resposta: O gráfico é a espiral abaixo partindo da origem:



Exemplo 4

O gráfico de ambas as curvas

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad \forall t \in [0, \pi],$$

e

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \cos(2\pi t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(2\pi t)\mathbf{j}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

coincidem e são iguais a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. As curvas $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, porém, são diferentes. Com efeito, a curva $\boldsymbol{\beta}$ percorre a circunferência em 1 unidade de t enquanto que $\boldsymbol{\alpha}$ completa o círculo quando $t = 2\pi$. Em outras palavras, embora as curvas tenham o mesmo gráfico, suas velocidades são diferentes.

Velocidade e Vetor Tangente

Definição 5 (Vetor Tangente e Velocidade)

A derivada

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)), \quad \forall t \in I.$$

de uma curva suave $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ é o vetor tangente ou velocidade da curva α em t.

Definição 6 (Curva Suave Regular)

Uma curva suave $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ é dita regular se $\alpha'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ para todo $t \in I$.

Um ponto t_s é dito singular se $\alpha'(t_s) = (0, 0, \ldots, 0)$. A reta tangente à uma curva suave não está bem definida num ponto singular!

Exemplo 7

Esboce o gráfico da curva

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

É α uma curva regular?

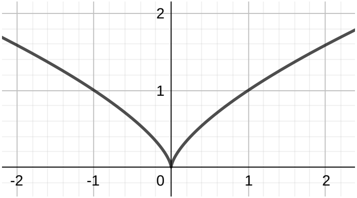
Exemplo 7

Esboce o gráfico da curva

$$\alpha(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

É α uma curva regular?

Resposta: O gráfico é



A velocidade é $\alpha'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. Note que $\alpha'(t) = 0$ se $t = 0$. Logo, a curva não é regular.

Comprimento de Arco

Definição 8 (Comprimento de Arco)

O comprimento de arco de uma curva suave regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ em $[a, b] \subseteq I$ é dado pela integral

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

em que $\|\alpha'(t)\|$ denota a norma do vetor tangente à α em t.

A dedução desse resultado pode ser encontrada nas seções 14.10 – 14.12 de **Tom M. Apostol**. *Calculus - Volume I*. 2 Ed. John Wiley and Sons, 1967.

Exemplo 9

Calcule o comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = t\cos(2\pi t)\mathbf{i} + t\,\mathrm{sen}(2\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2.$$

Lembre-se que $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$.

Exemplo 9

Calcule o comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = t\cos(2\pi t)\mathbf{i} + t\,\mathrm{sen}(2\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2.$$

Lembre-se que $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}))$.

Resposta: A velocidade de α é

$$\alpha'(t) = (\cos(2\pi t) - 2\pi t\,\mathrm{sen}(2\pi t))\mathbf{i} + (\mathrm{sen}(2\pi t) - 2\pi t\cos(2\pi t))\mathbf{j}.$$

Logo, o comprimento de arco é

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(2\pi t)^2}dt = \frac{1}{4\pi}\left[4\pi\sqrt{1+16\pi^2} + \ln(4\pi + \sqrt{1+16\pi^2})\right].$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de curva parametrizável contínua, suave e regular, que são definidos por uma função $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, em que $I = (a, b)$ é um intervalo aberto.

Vimos que o vetor tangente, também conhecido como velocidade, que é obtido derivando cada componente de α.

Finalmente, mostramos que o comprimento de arco de uma curva regular é obtido integrando a norma do vetor tangente de α.

O conteúdo da aula de hoje foi baseado nas seções 1.2 e 1.3 de:
Manfredo P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* 6 Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

Muito grato pela atenção!