Aula 6
Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

MA211 - Cálculo II

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Derivadas Direcionais

Suponha que desejamos calcular a taxa de variação de $z = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, no ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na direção de um vetor unitário $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Lembre-se que um vetor $\mathbf{u}$ é unitário se $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Exemplo 1

Suponha que $f(\mathbf{a})$ é a temperatura no ponto $\mathbf{a}$ numa sala com ar-condicionado mas com a porta aberta. Se movemos na direção da porta, a temperatura irá aumentar. Porém, se movemos na direção do ar-condicionado, a temperatura irá diminuir.

A taxa de variação de $z = f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{u}$ é a derivada direcional. Note que derivada direcional de depende tando do ponto $\mathbf{a}$ como da direção $\mathbf{u}$ na qual afastamos de $\mathbf{a}$.

Definição 2

Derivada Direcional Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis, isto é, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Considere um ponto **a** no interior de $\mathcal{D}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ um vetor com $\|\mathbf{u}\| = 1$. A derivada direcional de f em **a** na direção **u** é

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h},$$

se esse limite existir.

Observação

A distância entre **a** e $\mathbf{a} + h\mathbf{u}$ é $|h|$. Logo, o quociente

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

representa a taxa média de variação de f por unidade de distância sobre o segmento de reta de **a** à $\mathbf{a} + h\mathbf{u}$.

Derivada Direcional e as Derivadas Parciais

A derivada direcional generaliza as derivadas parciais no seguinte sentido. A derivada direcional de f em $\mathbf{a}$ na direção da i-ésima componente da base canônica, ou seja,

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima componente}}, 0, \ldots, 0)$$

é a derivada parcial de f em $\mathbf{a}$ com respeito à x_i, ou seja,

$$D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) = D_i f(\mathbf{a}).$$

Derivadas Parciais e a Derivada Direcional

Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(h) = f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}).$$

Por um lado, note que

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}).$$

Por outro lado, da regra da cadeia concluímos que

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dh} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dh} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dh}.$$

Agora, $\mathbf{x}(h) = \mathbf{a} + h\mathbf{u} = (a_1 + hu_1, a_2 + hu_2, \ldots, a_n + hu_n)$. Logo,

$$\frac{dx_1}{dh} = u_1, \frac{dx_2}{dh} = u_2, \ldots, \frac{dx_n}{dh} = u_n.$$

Portanto, tem-se

$$g'(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{a}} u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{a}} u_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{a}} u_n = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{a}} u_j.$$

Teorema 3

Se f é uma função diferenciável em $\mathbf{a}$, então f tem derivada direcional para qualquer vetor unitário $\mathbf{u}$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{a}} u_j$$

Observação:

Qualquer vetor unitário $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, para algum angulo θ. Nesse caso,

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

Teorema 3

Se f é uma função diferenciável, então f tem derivada direcional para qualquer vetor unitário $\mathbf{u}$ *e*

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j$$

Observação:

Qualquer vetor unitário $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, para algum angulo θ. Nesse caso,

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_y(x, y) \operatorname{sen}\theta.$$

Vetor Gradiente

A derivada direcional de f na direção $\mathbf{u}$ pode ser escrita em termos do seguinte produto escalar

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}_{\text{vetor gradiente}} \cdot \mathbf{u}.$$

Definição 4 (Vetor Gradiente)

O gradiente de uma função f, denotado por ∇f ou **grad** f, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Vetor Gradiente

A derivada direcional de f na direção $\mathbf{u}$ pode ser escrita em termos do seguinte produto escalar

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}_{\text{vetor gradiente}} \cdot \mathbf{u} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Definição 4 (Vetor Gradiente)

O gradiente de uma função f, denotado por ∇f ou **grad** f, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Interpretação do Vetor Gradiente

Sabemos que o produto escalar de dois vetores **a** e **b** satisfaz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

em que θ é o angulo entre **a** e **b**. Assim, podemos escrever

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{=1} \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta.$$

O valor máximo de $\cos\theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$. Logo,

Teorema 5

O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f$ de uma função diferenciável é $\|\nabla f\|$ e ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que ∇f.

Em outras palavras, a maior taxa de variação de $f(\mathbf{x})$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente.

Em $\mathbb{R}^2$...

Considere uma função f de duas variáveis x e y e uma curva de nível dada pelo conjunto dos pontos

$$\{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : f(x(t), y(t)) = k\}.$$

Se $P = (x(t_0), y(t_0))$, então pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

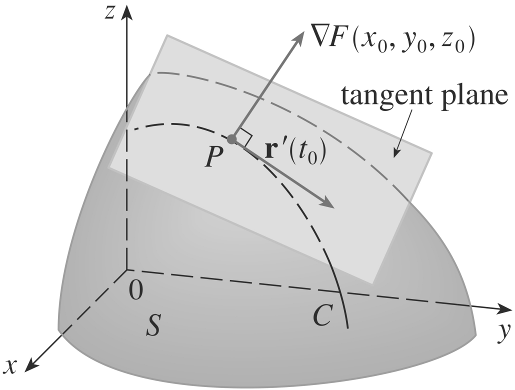
em que $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ e $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ é o vetor tangente a curva de nível em P.

Conclusão:

O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular à reta tangente à curva de nível de $f(x, y) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0)$.

Em $\mathbb{R}^3$...

O vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de $F(x, y, z) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$.



O plano tangente à superfície $F(x, y, z) = k$ em $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dado por todos os vetores que partem de (x_0, y_0, z_0) e são ortogonais ao gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, ou seja, a equação do plano tangente é:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

A reta normal a superfície $F(x, y, z) = k$ em $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada pelo gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, ou seja,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, suas equações simétricas são

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Exemplo 6

Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2,$$

e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$.
Qual será $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?

Exemplo 6

Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2,$$

e **u** é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$.
Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

Resposta:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\right)$$

e

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 7

Determine a derivada direcional da função

$$f(x,y) = x^2y^3 - 4y,$$

no ponto $P = (2,-1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Exemplo 7

Determine a derivada direcional da função

$$f(x, y) = x^2y^3 - 4y,$$

no ponto $P = (2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Resposta:

$$D_{\mathbf{u}}f(2, -1) = \frac{32}{\sqrt{29}}.$$

Exemplo 8

Se

$$f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz,$$

a) determine o gradiente de f,

b) determine a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Exemplo 8

Se

$$f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz,$$

a) determine o gradiente de f,

b) determine a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Resposta:

a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y, z) = (\operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz).$$

b) A derivada direcional é

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exemplo 9

Suponha que a temperatura no ponto (x, y, z) do espaço seja dada por

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$

em que T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

Exemplo 9

Suponha que a temperatura no ponto (x, y, z) do espaço seja dada por

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$

em que T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

Resposta: A temperatura aumenta mais rapidamente na direção $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ e a taxa de aumento é

$$\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4^o C/m.$$

Exemplo 10

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Exemplo 10

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Resposta: A equação do plano tangente é

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0.$$

As equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}.$$