MA111 - Cálculo I

Aula A - Apresentação do Curso e Revisão de Conceitos

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Apresentação da Disciplina

Cálculo I (MA111) é uma disciplina coordenada. A bibliografia, horários de atendimento, calendário, critérios de avaliação, exercícios recomendados e muitas outras informações podem ser obtidas em

`http://www.ime.unicamp.br/~ma111`

Informações direcionadas especificamente para as turmas P e Q serão adicionadas nessa página:

`http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2017/MA111.php`

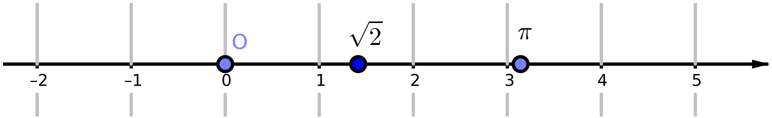
Números

No curso de cálculo, estudamos um conjunto de ferramentas matemáticas usadas para analisar e resolver diversos problemas.

Começaremos a aula de hoje revisando o sistema dos números reais.

Os números reais compreendem os números inteiros, racionais e irracionais.

Os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta. A origem corresponde ao zero. Os números a esquerda do zero são negativos e à direita são positivos.



Dizemos que a **é menor que** b, escrevemos $a < b$, se a está a esquerda de b. Equivalentemente, devemos ter $a - b > 0$.

O símbolo $a \leq b$ significa que $a < b$ ou $a = b$, ou seja, a **é menor ou igual a** b.

Analogamente, dizemos que a **é maior que** b, escrevemos $a > b$, se a está a direita de b.

Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados elementos do conjunto.

Se A é um conjunto, a notação $a \in A$ **significa que** a **é um elemento de** A.

Um conjunto pode ser definido listando seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Podemos também definir um conjunto através da propriedade dos seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{x : x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 7\}.$$

Se A e B são conjuntos, então

- A **união** $A \cup B$ é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou B.
- A **intersecção** $A \cap B$ é o conjunto de todos os elementos que estão em A e B.

O **conjunto vazio**, aquele que não tem nenhum elemento, é denotado por $\emptyset$.

O conjunto de todos os **números reais** é denotado por $\mathbb{R}$.

Intervalos

Intervalos são conjuntos de números reais frequentes no curso de cálculo.

Considere números reais a e b, com $a < b$:

- O **intervalo aberto** de a até b é o conjunto

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

- O **intervalo fechado** de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}.$$

Existem intervalos que não é nem aberto e nem fechado.

Intervalos Infinitos

Usamos também as notações

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \qquad (-\infty, a) = \{x : x < a\},$$
$$[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}, \qquad (-\infty, a] = \{x : x \leq a\},$$

para representar intervalos infinitos.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ pode ser representado por $(-\infty, +\infty)$.

Apesar da notação, os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números.

Desigualdades

Usamos as seguintes regras quando trabalhamos com desigualdades:

Regras para Desigualdades

- Se $a < b$, então $a + c < b + c$ para qualquer c.
- Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
- Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
- Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
- Se $0 < a < b$, então $1/a > 1/b$.

Exemplo 1

Resolva a inequação $1 + x < 7x + 5$.

Observação:

Resolver a equação corresponde a determinar o conjunto de todos os valores de x que satisfazem a inequação acima.

Exemplo 1

Resolva a inequação $1 + x < 7x + 5$.

Observação:

Resolver a equação corresponde a determinar o conjunto de todos os valores de x que satisfazem a inequação acima.

Resposta: A solução da inequação é o intervalo infinito $(-2/3, +\infty)$.

Exemplo 2

Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Exemplo 2

Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Resposta: A solução da inequação é o intervalo fechado $[2, 3]$.

Exemplo 3

Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

Exemplo 3

Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

Resposta: A solução da inequação é

$$\{x : -4 < x < 0 \text{ ou } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, +\infty).$$

Valor Absoluto

O valor absoluto de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 na reta real.

Alternativamente, temos

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Também podemos escrever

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Lembre-se que a raiz quadrada de um número não-negativo é também um número não-negativo. A raiz quadrada $\sqrt{a}$ é diferente da solução da equação $x^2 = a$, que é $+\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$.

Propriedades dos Valores Absolutos

Dados números a e b e um inteiro n, tem-se:

- $|ab| = |a||b|$.
- Se $b \neq 0$, então $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
- $|a^n| = |a|^n$.

Além disso, se $a > 0$, então

1. $|x| = a$ se e somente se $x = a$ ou $x = -a$.
2. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$.
3. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$.

A seguinte desigualdade envolvendo o valor absoluto possui um papel importante na matemática.

Teorema 4 (Desigualdade Triangular)

Para quaisquer números reais a e b, tem-se

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

O nome do teorema acima segue da seguinte observação geométrica. Se $|a|$, $|b|$ e $|c| = |a+b|$ representam os lados de um triangulo, então a soma dos dois primeiros lados é maior que o terceiro.

Desigualdade Triangular.

Sabemos que

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{e} \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Somando as duas desigualdades, temos

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

que é equivalente à

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

$\square$

Exemplo 5

Resolva a equação $|2x - 5| = 3$.

Exemplo 5

Resolva a equação $|2x - 5| = 3$.

Resposta: A solução da equação é $x = 4$ ou $x = 1$.

Exemplo 6

Resolva a inequação $|x-5| < 2$ e interprete geometricamente o resultado.

Exemplo 6

Resolva a inequação $|x - 5| < 2$ e interprete geometricamente o resultado.

Resposta: O conjunto de solução é o intervalo aberto $(3, 7)$. Geometricamente, o conjunto de solução é o segmento de reta composto por todos os pontos cuja distância à 5 é menor que 2.

Exemplo 7

Resolva a inequação $|3x + 2| \geq 4$.

Exemplo 7

Resolva a inequação $|3x+2| \geq 4$.

Resposta: O conjunto de solução é

$$\{x : x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2/3\} = (-\infty, -2] \cup (2/3, +\infty).$$

Exemplo 8

Sabendo que $|x - 4| < 0,1$ e $|y - 7| < 0,2$, use a desigualdade triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

Exemplo 8

Sabendo que $|x - 4| < 0,1$ e $|y - 7| < 0,2$, use a desigualdade triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

Resposta: Pela desigualdade triangular, temos que $|(x + y) - 11| < 0,3$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos como será a disciplina MA111.

Na aula de hoje também revisamos alguns conceitos básicos para o desenvolvimento da disciplina.

Na próxima aula, falaremos sobre funções; um conceito muito importante em toda a matemática.

Muito grato pela atenção!