MA111 - Cálculo I

Aula 9 - Álgebra das Derivadas.
Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais.

Marcos Eduardo Valle

Regras de Derivação

Se f e g são funções deriváveis, então valem as seguintes propriedades:

(i) $\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)] + \dfrac{d}{dx}[g(x)]$.

(ii) $\dfrac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)] - \dfrac{d}{dx}[g(x)]$.

(iii) $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)]\,g(x) + f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]$.

(iv) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\frac{d}{dx}[f(x)]\,g(x) - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$, se $g(x) \neq 0$.

Regras de Derivação - Notação Alternativa

Se f e g são funções deriváveis, então valem as seguintes propriedades:

(i) $(f+g)' = f' + g'$.

(ii) $(f-g)' = f' - g'$.

(iii) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, nos pontos em que $g(x) \neq 0$.

Demostração do item (i)

Pela definição de derivada e lembrando que o limite da soma é a soma dos limites, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+\frac{d}{dx}\left[g(x)\right].
\end{aligned}$$

Demostração do item (iii)

Pela definição de derivada, temos

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = (*).$$

Subtraindo e somando $g(x)f(x+h)$ no numerador, encontramos

$$\begin{aligned}
(*) &= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right].
\end{aligned}$$

Na última equação, utilizamos o fato de f ser contínua em x.

Derivadas Elementares:

- $\frac{d}{dx}[c] = 0$ para qualquer constante c.
- $\frac{d}{dx}[x] = 1$.

Considerando uma função constante $g(x) = c$ na regra do produto, obtemos a propriedade:

Multiplicação por Escalar

Para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] .$$

Derivada de Polinômios:

Da regra do produto e do quociente, concluímos:

- $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, para qualquer inteiro $n \neq 0$.

Teorema 1 (Derivada da função polinomial)

A derivada de um polinômio de grau n é:

$$\frac{d}{dx}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_nx^n\right] = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$$

Teorema 2 (Derivada da *n*-ésima raiz)

Seja n um inteiro positivo. A derivada da n-ésima raiz é:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1/n}\right] = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}, \quad \forall x > 0.$$

Combinando a derivada da *n*-ésima raiz com os resultados anteriores e usando a continuidade do exponente, temos:

Teorema 3 (Derivada de Potência)

Para qualquer número real α, tem-se

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}\right] = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Demonstração do teorema 2

Pela definição de derivada, temos:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1/n}\right] = \lim_{y\to x}\frac{y^{1/n}-x^{1/n}}{y-x} = (*).$$

Tomando $u = x^{1/n}$ e $v = y^{1/n}$ e lembrando que

$$v^n - u^n = (v-u)(v^{n-1} + v^{n-2}u + \cdots + vu^{n-2} + u^{n-1}),$$

encontramos

$$\begin{aligned}
(*) &= \lim_{v\to u}\frac{v-u}{v^n-u^n} \\
&= \lim_{v\to u}\frac{1}{v^{n-1} + v^{n-2}u + \cdots + vu^{n-2} + u^{n-1}} \\
&= \frac{1}{nu^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-1/n}} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.
\end{aligned}$$

Derivada da Função Exponencial

Teorema 4 (Derivada da função exponencial)

A derivada da função exponencial $f(x) = a^x$*, para* $a > 0$*, é:*

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(0)a^x = f'(0)f(x).$$

Demonstração.

Pela definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\frac{a^h-1}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\\ &= a^x f'(0).\end{aligned}$$

$\square$

Função Exponencial Natural

Definição 5 (Número e)

O número e é tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Teorema 6 (Derivada da Função Exponencial)

$$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x.$$

Exemplo 7

Encontre a n-ésima derivada de

$$f(x) = xe^x.$$

Exemplo 7

Encontre a *n*-ésima derivada de

$$f(x) = xe^x.$$

Resposta:

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x.$$

Exemplo 8

Derive a função

$$f(t) = \sqrt{t}(a + bt).$$

Exemplo 8

Derive a função

$$f(t) = \sqrt{t}(a + bt).$$

Resposta:

$$f'(t) = \frac{a + 3bt}{a\sqrt{t}}.$$

Exemplo 9

Encontre a derivada de

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$$

Exemplo 9

Encontre a derivada de

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$$

Resposta:

$$y' = \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}.$$

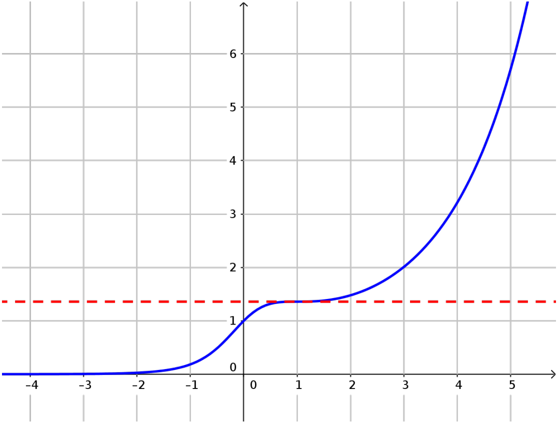
Exemplo 10

Encontre a reta tangente a curva $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$ no ponto $(1, \frac{1}{2}e)$.

Exemplo 10

Encontre a reta tangente a curva $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ no ponto $(1, \frac{1}{2}e)$.

Resposta: $r(x) = \dfrac{1}{2}e$.



Considerações Finais

Na aula de hoje vimos que a derivada da soma, da diferença, do produto e do quociente são dados respectivamente pela soma, a diferença, o produto e o quociente das derivadas.

Essa álgebra, juntamente com algumas derivadas essenciais, permite calcular derivadas sem recorrer a definição usando limite.

Dentre as derivadas essenciais, destacamos na aula de hoje a derivada de polinômios, de potências e das funções exponenciais.

Na próxima aula, veremos a derivada de funções trigonométricas.

Muito grato pela atenção!