MA111 - Cálculo I

Aula 8 - Derivadas e Taxas de Variação. A Derivada como uma Função.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na Aula 2, discutimos os problemas da tangente e da velocidade para apresentar a ideia de limite.

O tipo especial de limite que aparece nesses dois problemas dão origem ao conceito de derivada, que dos conceitos fundamentais do curso de cálculo.

Vamos iniciar a aula relembrando o limite que aparece no problema da tangente.

Tangente e a Derivada

Tangente

A reta tangente à uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por P e tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

se o limite existir. Alternativamente, podemos escrever

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definição 1 (Derivada)

A derivada de f em a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existir. Alternativamente, podemos escrever:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Derivada e a reta tangente:

A reta tangente a curva $y = f(x)$ em $P(a, f(a))$ é dada pela equação:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Taxa de Variação

Suponha que y depende de x.

Se x variar de x_1 para x_2, então y deve variar de y_1 para y_2.

Escrevendo $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$, o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é a taxa média de variação de y em relação à x em $[x_1, x_2]$.

A taxa instantânea de variação em $x = x_1$ é

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Taxa de Variação:

Se $y = f(x)$, então

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

é a taxa instantânea de variação de y em $x = a$.

Velocidade

Note que a velocidade, data pelo quociente da distância percorrida Δs pela tempo decorrido Δt é a taxa de variação.

Se $s(t)$ representa a posição de uma partícula no tempo t, então sua velocidade instantânea é $s'(t)$.

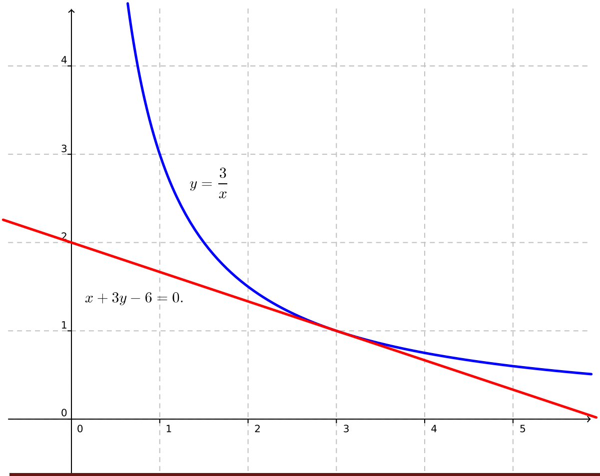
Exemplo 2

Encontre a reta tangente a hipérbole $y = 3/x$ em $(3, 1)$.

Exemplo 2

Encontre a reta tangente a hipérbole $y = 3/x$ em $(3, 1)$.

Resposta: A equação da reta tangente é $x + 3y - 6 = 0$.



Exemplo 3

A posição de uma partícula é pela equação do movimento

$$s = f(t) = \frac{1}{1+t},$$

em que t é medido em segundos e s em metros. Determine a velocidade da partícula em $t = 2$ segundos.

Exemplo 3

A posição de uma partícula é pela equação do movimento

$$s = f(t) = \frac{1}{1+t},$$

em que t é medido em segundos e s em metros. Determine a velocidade da partícula em $t = 2$ segundos.

Resposta: A velocidade da partícula em $t = 2$ é dada pela derivada

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{9}.$$

Exemplo 4

Encontre a derivada de

$$f(x) = x^2 - 8x + 9,$$

em um ponto $x = a$.

Exemplo 4

Encontre a derivada de

$$f(x) = x^2 - 8x + 9,$$

em um ponto $x = a$.

Resposta: A derivada de $f(x)$ em $x = a$ é

$$f'(a) = 2a - 8.$$

A função derivada

Definição 5 (Derivada de f em a:)

A derivada de f em a é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existir.

Definição 6 (A função derivada:)

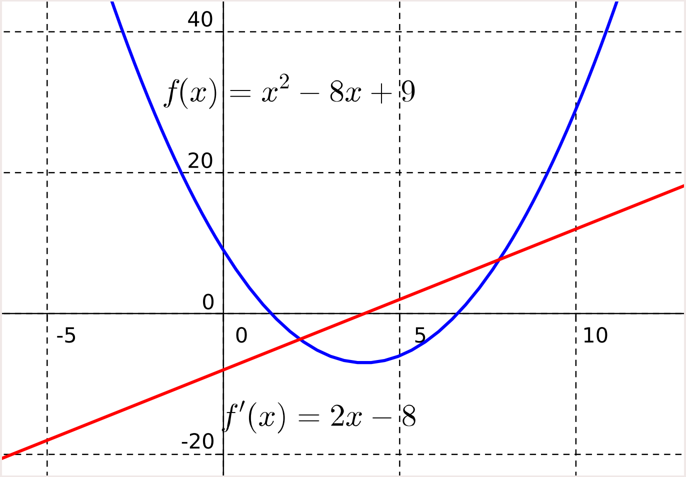
Definimos a função f', chamada derivada da função f, através da equação

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

nos pontos x para os quais o limite existe.

Exemplo 7

A derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ é a função $f'(x) = 2x - 8$.



Nomenclatura:

- Dizemos que f é derivável ou diferenciável em a se $f'(a)$ existe.
- Dizemos que f é derivável ou diferenciável em um intervalo aberto I se $f'(x)$ existe para qualquer $x \in I$.

Notação:

Se $y = f(x)$, escrevemos:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Observação:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Derivadas de Ordem Superior

- Se uma função f é derivável, então f' é uma função.
- A derivada de f', denotada por f'', é chamada segunda derivada ou derivada de ordem dois de f.
- Similarmente, a terceira derivada ou derivada de ordem três de f é $f''' = (f'')'$.
- De um modo geral, a n-ésima derivada ou derivada de ordem n de f é $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Observação:

Se $f(t)$ fornece a posição de uma partícula no tempo t, então a segunda derivada de f corresponde à aceleração da partícula.

Exemplo 8

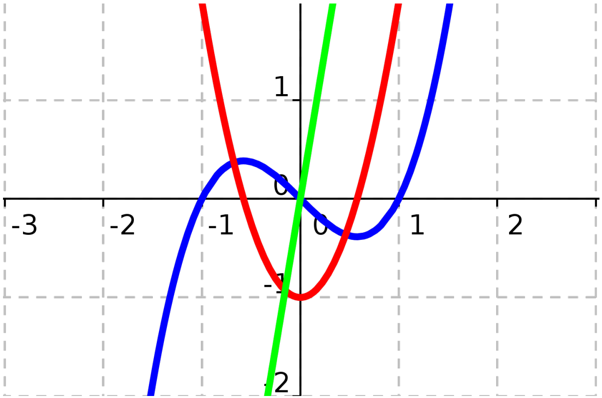
Determine a derivada e a segunda derivada da função $f(x) = x^3 - x$.

Lembre-se que $(x + h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$.

Exemplo 8

Determine a derivada e a segunda derivada da função $f(x) = x^3 - x$.

Resposta: Temos que $f'(x) = 3x^2 - 1$ e $f''(x) = 6x$.



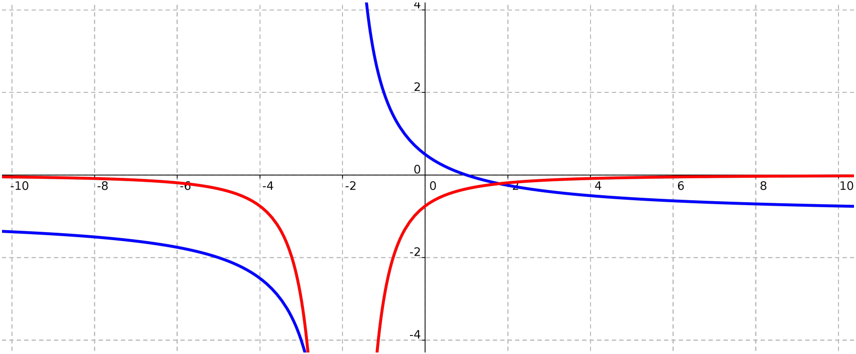
Exemplo 9

Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

Exemplo 9

Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

Resposta: A derivada de f é $f'(x) = \dfrac{-3}{(2+x)^2}$.



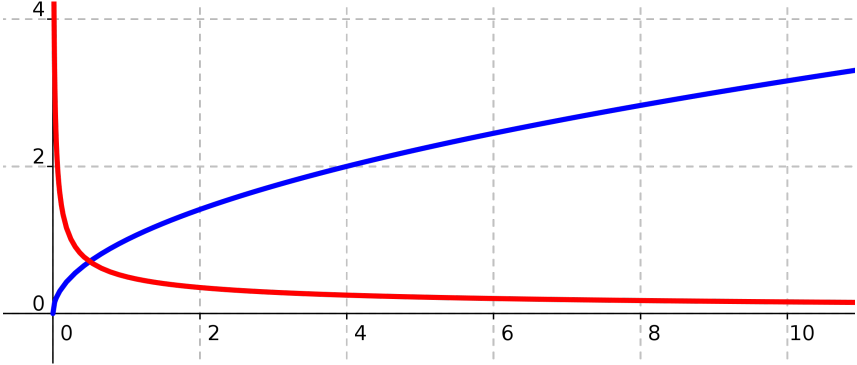
Exemplo 10

Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, +\infty)$.
Determine a derivada e seu domínio.

Exemplo 10

Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, +\infty)$.
Determine a derivada e seu domínio.

Resposta: A derivada é $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, cujo domínio é $(0, +\infty)$.



Derivada e Continuidade

Teorema 11 (Diferenciabilidade $\Rightarrow$ Continuidade)

Se f for derivável em a, então f é contínua em a.

Derivada e Continuidade

Teorema 11 (Diferenciabilidade $\Rightarrow$ Continuidade)

Se f for derivável em a, então f é contínua em a.

Demonstração.

Se f é derivável em a, então

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

isto é, o limite existe. Aplicando o limite na equação

$$f(x) - f(a) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) (x - a),$$

concluímos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. $\square$

Derivada e Continuidade

Teorema 11 (Diferenciabilidade $\Rightarrow$ Continuidade)

Se f for derivável em a, então f é contínua em a.

Observação:

A recíproca do teorema anterior é falsa, ou seja, f pode ser contínua em a, mas $f'(a)$ pode não existir!

Exemplo 12

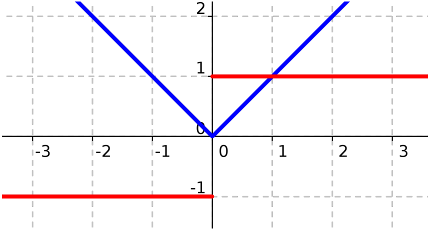
Onde a função $f(x) = |x|$ é derivável?

Exemplo 12

Onde a função $f(x) = |x|$ é derivável?

Resposta: A função $f(x) = |x|$ é derivável em qualquer $x \neq 0$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



Note que f é contínua mas não é derivável em $x = 0$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de derivada como o limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

A derivada de uma função está relacionada ao coeficiente angular da reta tangente, à velocidade instantânea e também a taxa de variação.

Nas próximas aulas, estudaremos propriedades da derivada e como ela pode ser determina sem recorrer a definição do limite.

Muito grato pela atenção!