MA111 - Cálculo I

Aula 7 - Limites no infinito e assíntotas horizontais

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Limite no Infinito

Definição 1 (Limite no Infinito)

Seja f uma função definida num intervalo $(a, +\infty)$. Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L quando x é suficientemente grande. Formalmente, dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Limite no Menos Infinito

Definição 2 (Limite no Menos Infinito)

Seja f uma função definida num intervalo $(-\infty, a)$. Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

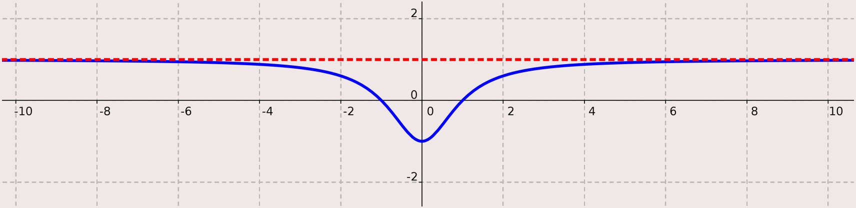
se, dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$x < -N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Assíntota Horizontal

Exemplo 3

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$



Definição 4 (Assíntota Horizontal)

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

Cálculo de limites usando suas propriedades

Seja c uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

Então, valem as equações:

I. $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x).$

II. $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to +\infty} g(x).$

III. $\lim_{x \to +\infty} [cf(x)] = c \lim_{x \to +\infty} f(x).$

IV. $\lim_{x \to +\infty} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \lim_{x \to +\infty} g(x).$

V. $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to +\infty} f(x)}{\lim_{x \to +\infty} g(x)}$, se $\lim_{x \to +\infty} g(x) \neq 0.$

Propriedades análogas valem substituindo $+\infty$ por $-\infty$.

Cálculo de limites usando suas propriedades

Proposição:

Para todo $r > 0$ racional, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Similarmente, para todo $r > 0$ racional, vale

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0,$$

se x^r está definido para qualquer x.

Exemplo 5

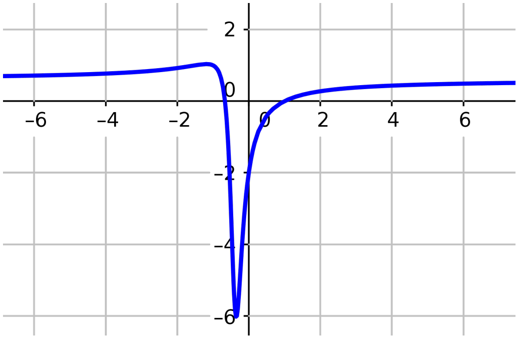
Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Exemplo 5

Calcule, se existir, o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Resposta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}.$$



Exemplo 6

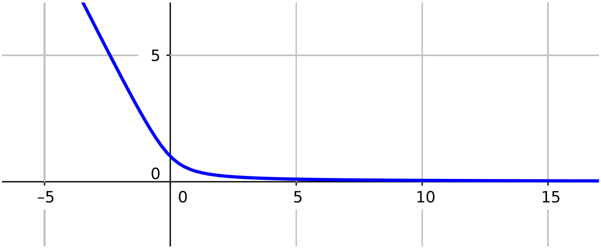
Calcule, se existir, o limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Exemplo 6

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$.

Resposta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = 0.$$



Exemplo 7

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$.

Exemplo 7

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$.

Resposta: Quando x cresce, os valores de $\operatorname{sen} x$ oscilam entre -1 e $+1$ sem tender para nenhum número. Portanto, o limite não existe.

Exemplo 8

Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$.

Exemplo 8

Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.

Resposta: Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

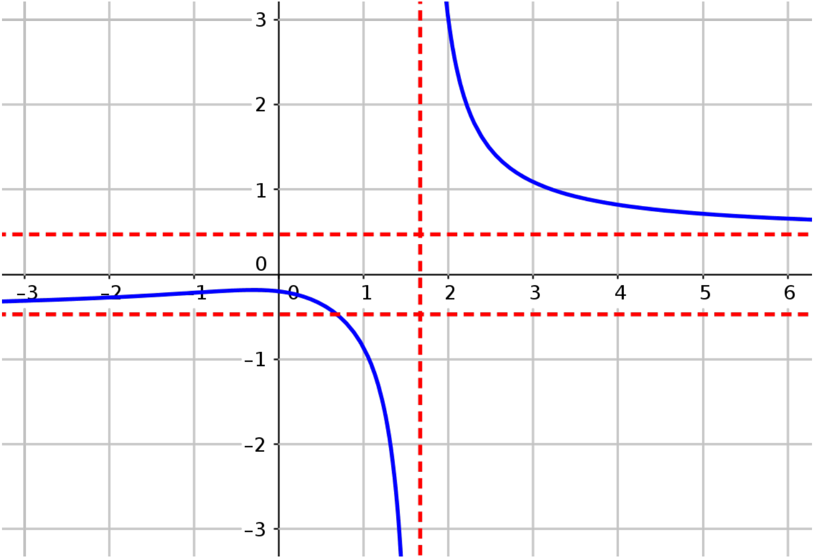
Portanto, as retas $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ são assíntotas horizontais do gráfico de f.

Sabemos que

$$\lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^-} f(x) = -\infty.$$

Portanto, a reta $x = \frac{5}{3}$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

Gráfico da função do Exemplo 8 e suas assíntotas:



Limites Infinitos no Infinito

Definição 9 (Limites Infinitos no Infinito)

Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

se, dado $M > 0$, existe $N > 0$, tal que

$$x > N \quad \Rightarrow f(x) > M.$$

Definições análogas podem ser formuladas substituindo $+\infty$ por $-\infty$.

Exemplo 10

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$.

Exemplo 10

Calcule, se existir, o limite $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$.

Resposta: Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty.$$

Exemplo 11

Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$$

Exemplo 11

Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$$

Resposta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = -\infty.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de limite no infinito.

Quando o limite no infinito existe, ele define uma assíntota horizontal do gráfico da função.

Vimos também limites infinitos no infinitos.

Muito grato pela atenção!