

MA111 - Cálculo I

Aula 6 - Continuidade e o Teorema do Valor Intermediário



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Continuidade

Definição 1 (Função Contínua em a)

Uma função f é contínua em a se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Observação:

A definição acima requer:

- $f(a)$ está definida.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Interpretação de uma função contínua em a :

Se f é contínua em a , então uma pequena perturbação em a deve produzir uma pequena perturbação em $f(a)$.

Definição 2 (Função Descontínua em a)

Se f não é contínua em a , dizemos que f é **descontínua em a** ou f **possui uma descontinuidade em a** .

Definição 3 (Continuidade em I)

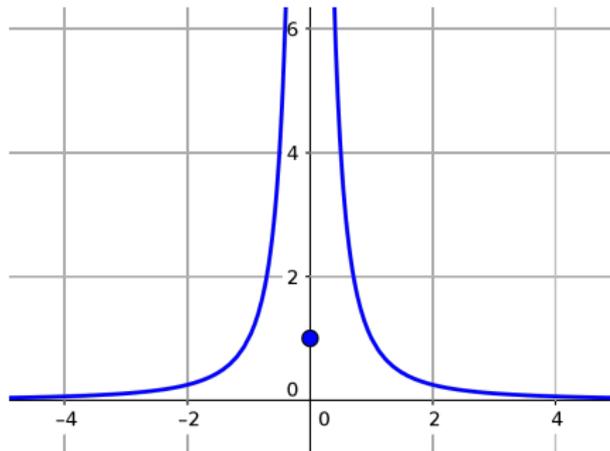
Dizemos que f é contínua em um intervalo I se f é contínua em todo $x \in I$.

Interpretação Geométrica

Geometricamente, o gráfico de uma função contínua em I pode ser desenhado sem remover a caneta do papel.

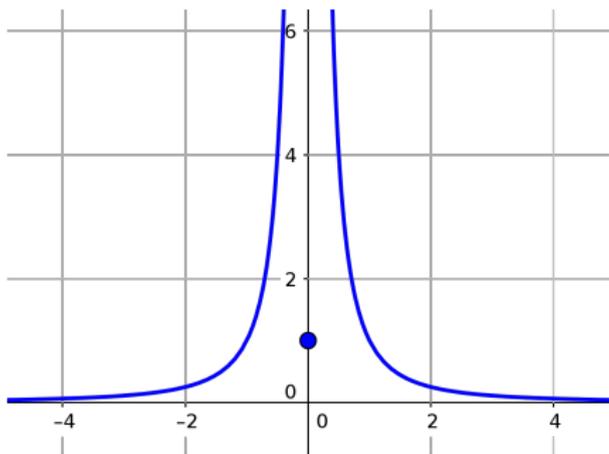
Exemplo 4

Onde a função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ é descontínua?



Exemplo 4

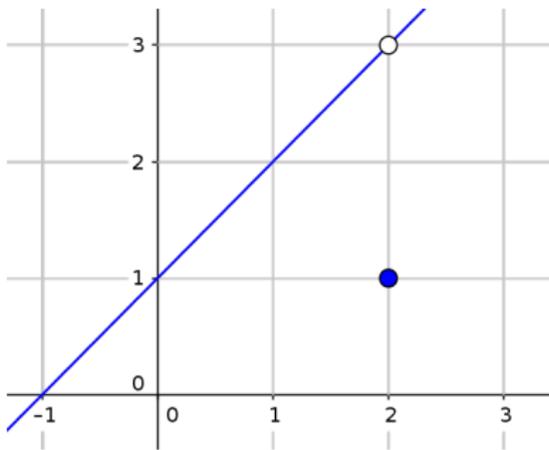
Onde a função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ é descontínua?



Resposta: Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe. Logo, f é descontínua em 0. Dizemos que f tem uma descontinuidade infinita nesse caso.

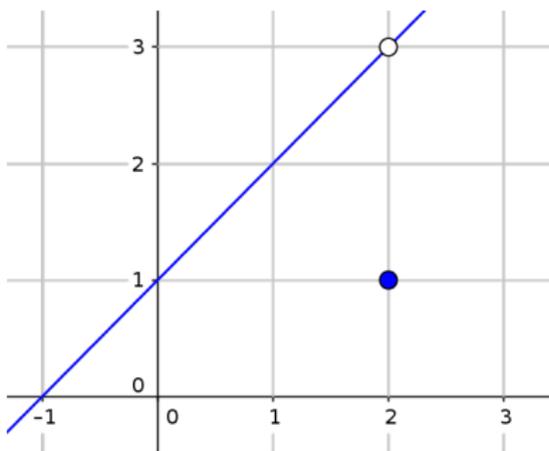
Exemplo 5

Onde a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$ é descontínua?



Exemplo 5

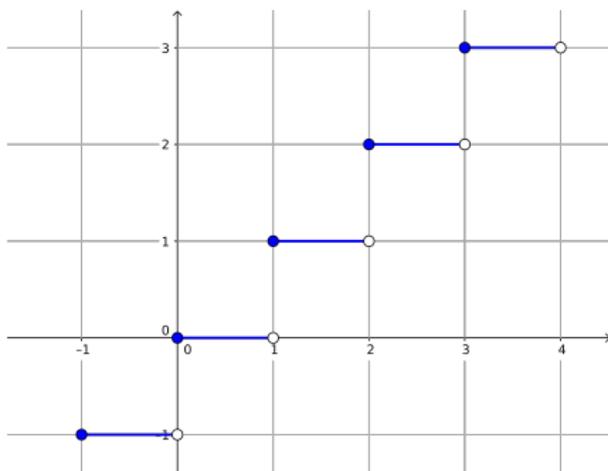
Onde a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$ é descontínua?



Resposta: Sabemos que $f(2) = 1$, mas $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Logo, f é descontínua em 2. A descontinuidade é removível (basta redefinir $f(2) = 3$)!

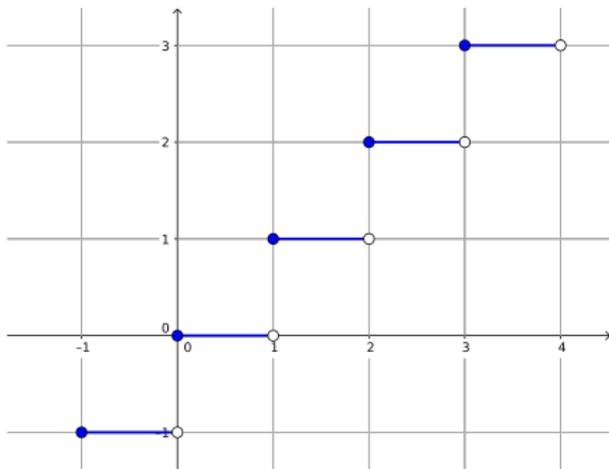
Exemplo 6

Onde a função $f(x) = \lfloor x \rfloor$, que fornece o maior inteiro menor ou igual a x , é descontínua?



Exemplo 6

Onde a função $f(x) = \lfloor x \rfloor$, que fornece o maior inteiro menor ou igual a x , é descontínua?



Resposta: A função maior inteiro tem descontinuidade em todos os inteiros. Dizemos que f tem descontinuidades em saltos!

Continuidade Lateral

- f é contínua à direita se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

- f é contínua à esquerda se

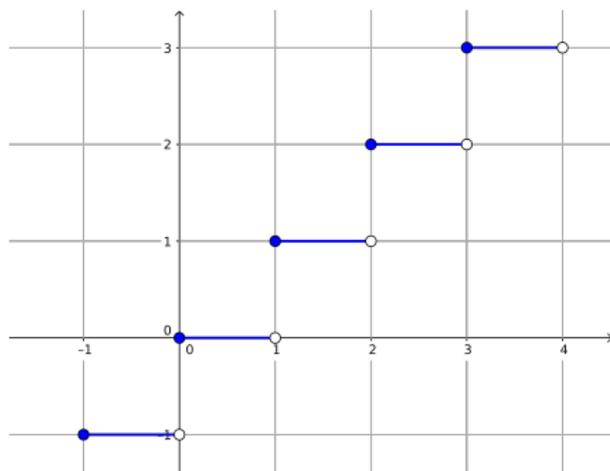
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

- f é contínua se e somente se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Exemplo 7

A função $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é contínua à direita mas descontínua à esquerda!



Propriedades de Funções Contínuas

Sejam f e g funções contínuas em a e c uma constante. Nesse caso, são também contínuas em a as funções:

- $f + g$.
- $f - g$.
- $c \cdot f$.
- $g \cdot g$.
- $\frac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$.

São funções contínuas em seus domínios:

- Polinômios.
- Funções racionais.
- Funções trigonométricas.
- Funções trigonométricas inversas.
- Funções exponenciais.
- Funções logarítmicas.

Exemplo 8

Encontre $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

Exemplo 8

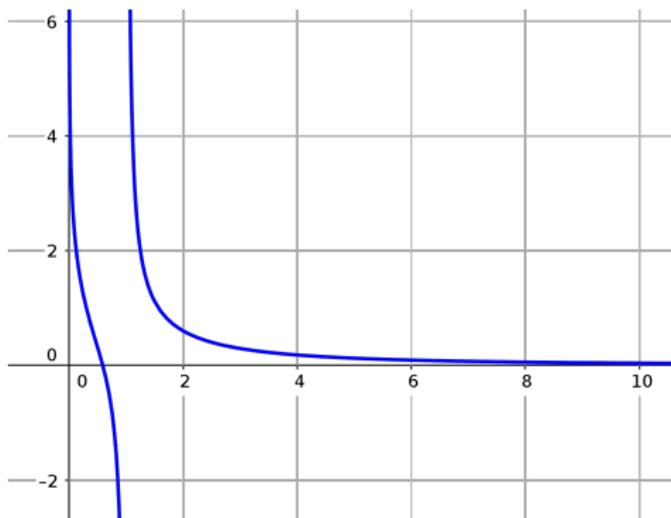
Encontre $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

Resposta: Como a função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ é uma função racional em seu domínio que é $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\}$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}.$$

Exemplo 9

Onde a função $f(x) = \frac{\ln x + \operatorname{tg}^{-1} x}{x^2 - 1}$ é descontínua?



Exemplo 9

Onde a função $f(x) = \frac{\ln x + \operatorname{tg}^{-1} x}{x^2 - 1}$ é descontínua?



Resposta: A função é contínua em $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Teorema 10

Seja f uma função contínua em b e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. Nesse caso,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Exemplo 11

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsen\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

Teorema 10

Seja f uma função contínua em b e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. Nesse caso,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Exemplo 11

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsen\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

Resposta: Como \arcsen é uma função contínua, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arcsen\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \arcsen\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \arcsen\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Teorema 12 (Continuidade da Composta:)

Se g for contínua em a e f em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a .

Teorema do Valor Intermediário:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se y_0 é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Exemplo 13

Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0,$$

entre 0 e 1.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de função contínua.

Exemplos de funções contínuas em seus domínios incluem polinômios, funções racionais, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Apresentamos também diversos resultados sobre as funções contínuas, incluindo o teorema do valor intermediário.

Muito grato pela atenção!