MA111 - Cálculo I

Aula 4 - Definição Precisa de Limite

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula 3, vimos como o problema da tangente e da velocidade estão relacionados ao conceito de limite de uma função.

Inicialmente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente próximo, mas diferente, de a.

Essa afirmação é vaga. O que significa arbitrariamente próximo?

Formalizando Conceitos:

Dizemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L se pudermos fazer $|f(x) - L|$ arbitrariamente pequeno.

Formalmente, a afirmação acima corresponde à:

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ para qualquer } \epsilon > 0.$$

Similarmente, a frase "x suficientemente próximo de a" é formalizada através da proposição

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Definição precisa de Limite:

Definição 1 (Limite)

Seja f uma função definida sobre um intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente o próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 2 (Limite a Esquerda e a Direita)

Seja f uma função definida sobre um intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente o próprio a.

- Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$a - \delta < x < a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

- Escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 3 (Limites Infinitos)

Seja f uma função definida sobre um intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente o próprio a.

- Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

  se para todo $M > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M.$$

- Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

  se para todo $M > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) < -M.$$

Exemplos

Exemplo 4

Mostre, usando a definição de limite, que

a) $\lim\limits_{x \to 3} (4x - 5) = 7.$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$

c) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9.$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty.$

e) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M.$$

Considerações Finais

O limite de uma função é usado para estudar o comportamento da função próximo de um ponto que, muitas vezes, não pertence ao domínio da função.

Na aula de hoje formalizamos o conceito de limite de uma função.

Vimos também alguns exemplos de como mostramos que o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a é L.

Na próxima aula, veremos que não precisamos recorrer sempre à definição de um limite; podemos usar suas propriedades!

Muito grato pela atenção!