

MA111 - Cálculo I

Aula 26 - Volumes



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Nas aulas anteriores, apresentamos diversas técnicas de integração.

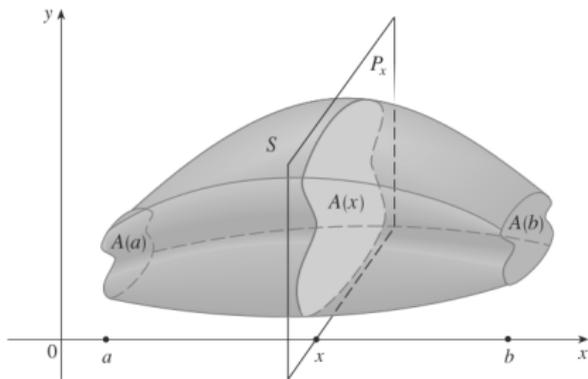
Na aula de hoje, apresentaremos uma aplicação das integrais para o cálculo de volumes de certos sólidos.

Especificamente, consideraremos cilindros e sólidos de rotação.

Calculo de Volumenes Usando Integrais

Seja S um sólido que está definido para $a \leq x \leq b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, em que A é uma função contínua, então o volume de S é

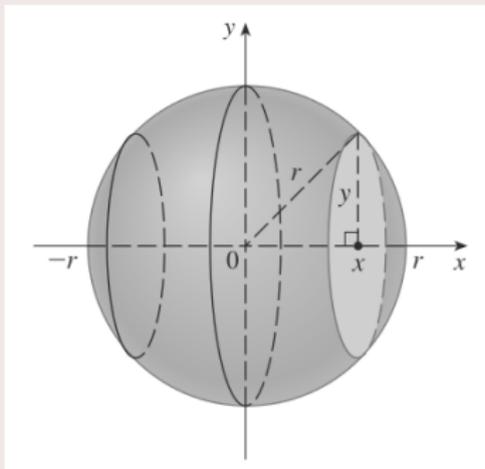
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 1

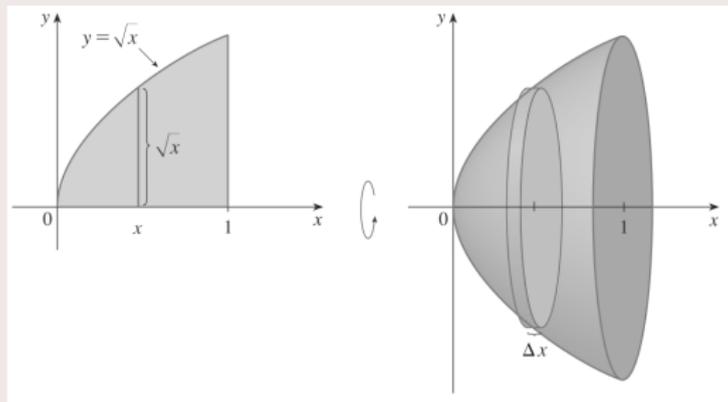
Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 2

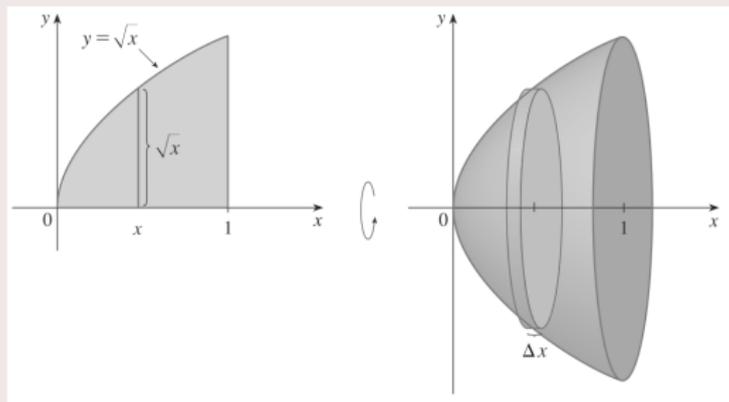
Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1. Ilustre a definição esboçando um cilindro aproximante típico.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 2

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1. Ilustre a definição esboçando um cilindro aproximante típico.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Resposta: O volume é $V = \pi/2$.

Exemplo 3

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ em torno do eixo y .

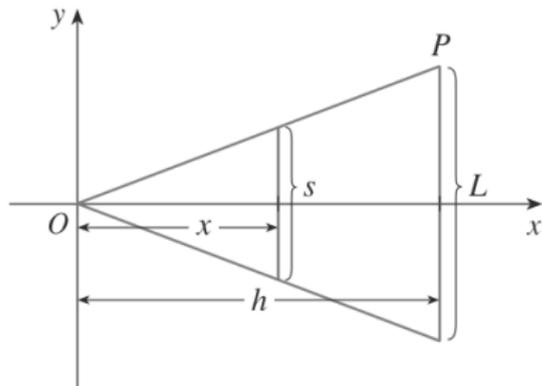
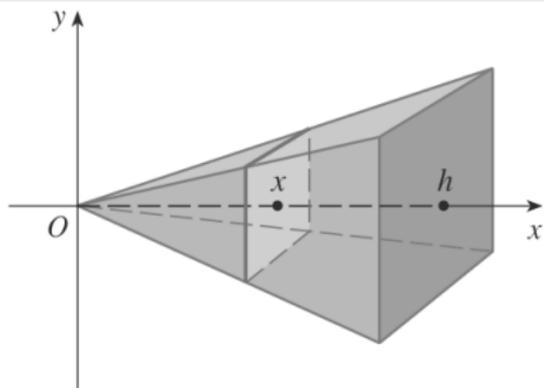
Exemplo 3

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ em torno do eixo y .

Resposta: O volume é $V = 96\pi/5$.

Exemplo 4

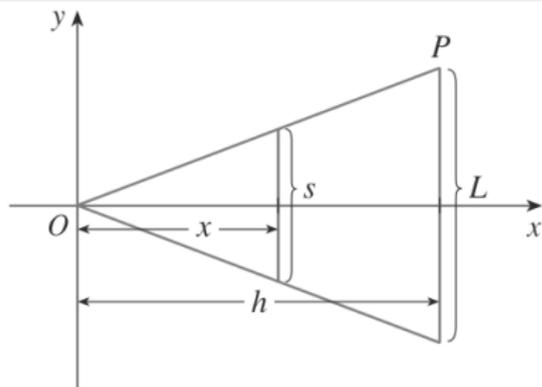
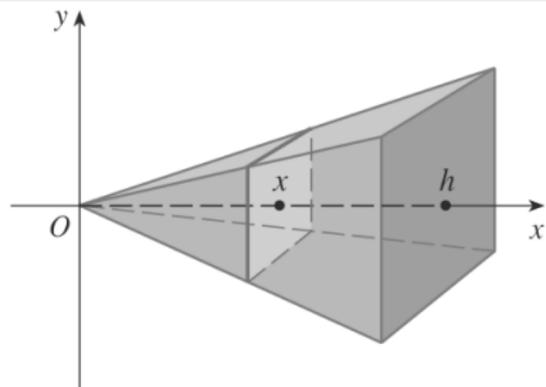
Encontre o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h .



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 4

Encontre o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h .



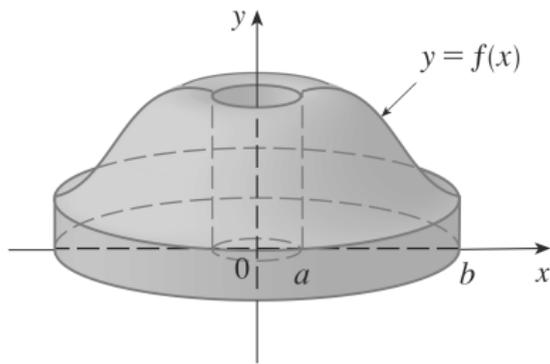
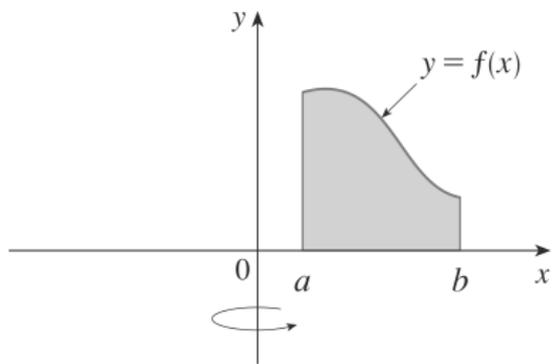
(Figura extraída do livro do Stewart.)

Resposta: O volume é $V = L^2 h / 3$.

Volume por Cascas Cilíndricas

O volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo y da região $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ é

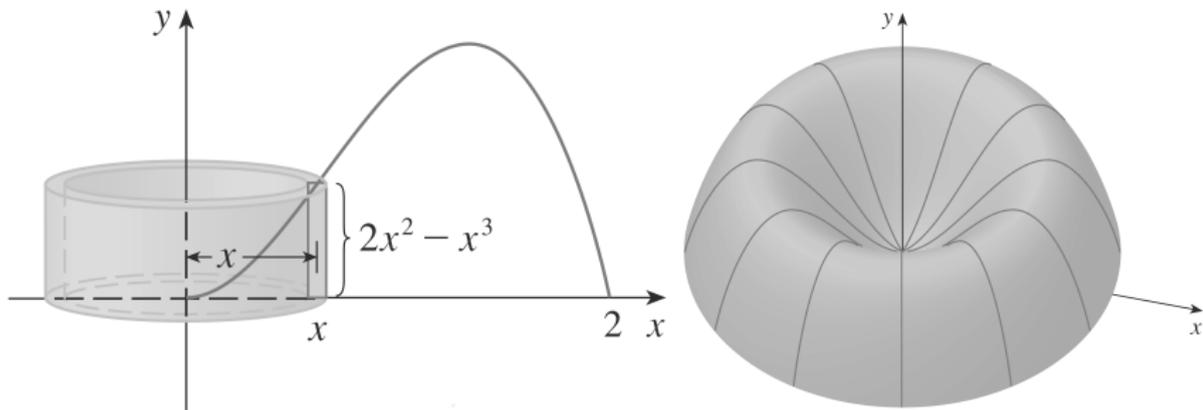
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i f(x_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 5

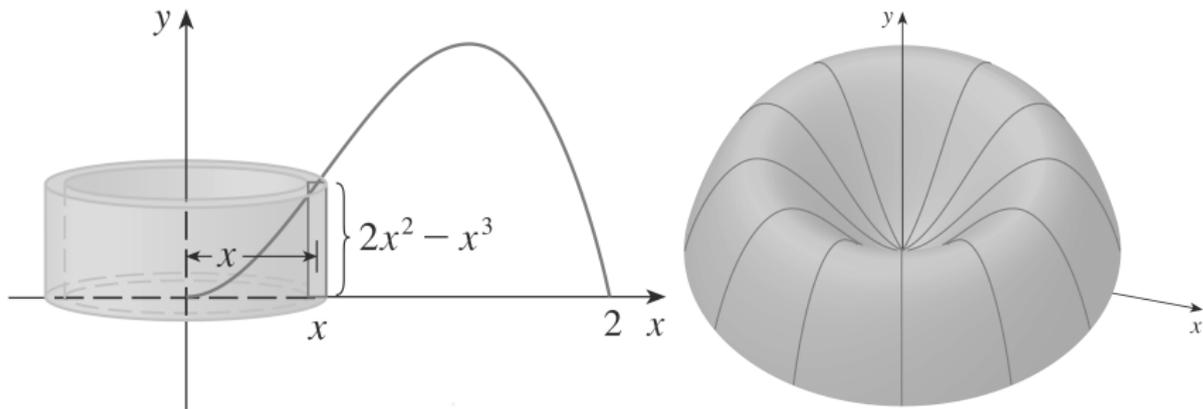
Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 5

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Resposta: O volume do sólido é $V = \frac{16}{5}\pi$.

Exemplo 6

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

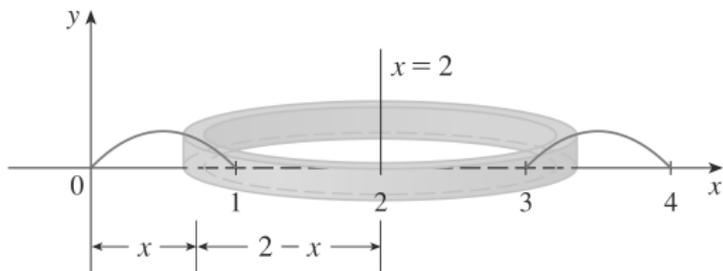
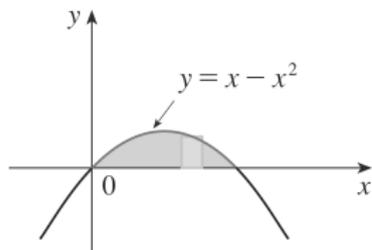
Exemplo 6

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

Resposta: O volume do sólido é $V = \frac{\pi}{6}$.

Exemplo 7

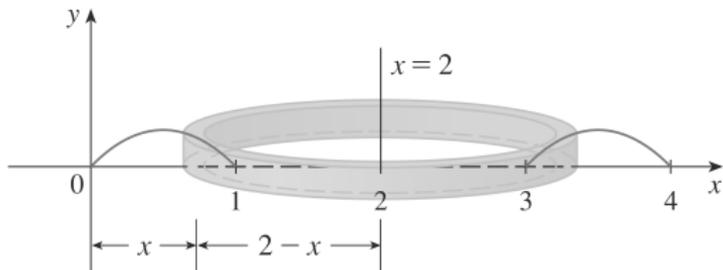
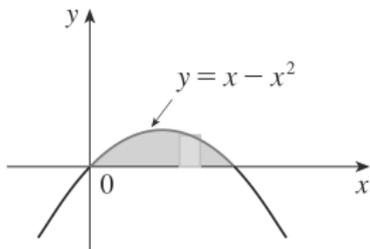
Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Exemplo 7

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.



(Figura extraída do livro do Stewart.)

Resposta: O volume do sólido é $V = \frac{\pi}{2}$.

Considerações Finais

Na aula de hoje vimos que o volume de um cilindro reto é dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

em que $A(x)$ representa a área de uma secção transversal do sólido.

Pelo método das cascas cilíndricas, o volume de um sólido obtido pela rotação de uma região $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Muito grato pela atenção!