MA111 - Cálculo I

Aula 25 - Estratégias de Integração. Integrais Impróprias.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Introdução

- Nas últimas aulas, apresentados diversas técnicas de integração.
- Na prática, porém, não é sempre óbvio qual técnica devemos aplicar para integrar uma dada função.
- Regras fáceis e rápidas para a aplicação de um dado método não podem ser dadas.
- Todavia, apresentaremos alguns conselhos que podem ser úteis.

Estratégias de Integração

Conselhos para calcular uma integral (segundo Stewart):

1. **Simplifique o integrando, se possível.**
2. **Procure uma substituição óbvia.**
   Tente identificar $u = g(x)$ cujo diferencial $du = g'(x)dx$ também ocorre no integrando.
3. **Classifique o integrando como:**
   a) Funções trigonométricas.
   b) Funções racionais.
   c) Integração por partes (produto de funções).
   d) Radicais do tipo $\sqrt{\pm x \pm a}$ (substituição trigonométrica).
4. **Tente novamente.**
   Lembre-se que efetivamente, calculamos uma integral fazendo uma *substituição* ou usando *integração por partes*.

Exemplo 1

Como podemos calcular a integral

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x} dx?$$

Exemplo 1

Como podemos calcular a integral

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x} dx?$$

Resposta:

$$I = \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x} dx.$$

Tomando $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} x dx$ e

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} \operatorname{sen} x dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6} (-du) = \int (u^{-4} - u^{-6}) du.$$

Exemplo 2

Como poderíamos calcular a integral

$$\int e^{\sqrt{x}} dx?$$

Exemplo 2

Como poderíamos calcular a integral

$$\int e^{\sqrt{x}} dx?$$

Resposta: Tome $u = \sqrt{x}$, então $u^2 = x$ e $2udu = dx$. Logo,

$$I = \int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^u (2udu) = 2 \int ue^u du,$$

que pode ser resolvida usando integração por partes.

Exemplo 3

Como podemos calcular a integral

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x} dx?$$

Exemplo 3

Como podemos calcular a integral

$$\int \frac{x^5+1}{x^3-3x^2-10x}dx?$$

Resposta: O integrando é uma função racional. Deve-se usar *frações parciais* (última aula).

Exemplo 4

Como podemos calcular a integral

$$\int \frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx?$$

Exemplo 4

Como podemos calcular a integral

$$\int \frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx?$$

Resposta: Substituímos $u = \ln x$. Logo,

$$du = \frac{1}{x}dx$$

e, portanto,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du.$$

Exemplo 5

Como podemos calcular a integral

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx?$$

Exemplo 5

Como podemos calcular a integral

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx?$$

Resposta: Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{1-x}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \\
&= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c.
\end{aligned}$$

Podemos Calcular a Integral de Qualquer Função Contínua?

Não! Por exemplo, a função $f(x) = e^{x^2}$ é uma função contínua e, portanto, sua integral existe! Se definirmos

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt,$$

pelo teorema fundamental do cálculo, $F'(x) = e^{x^2}$. Contudo, não existe uma expressão para F. Em outras palavras, F não é uma função elementar.

As funções elementares são as funções polinômiais, potências, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e suas inversas, e todas as funções que podem ser obtidas destas usando operações algébricas e composições.

Integrais Impróprias

Até o momento, consideramos integrais definidas

$$\int_a^b f(x)dx,$$

em que

(a) o intervalo $[a, b]$ é limitado e,

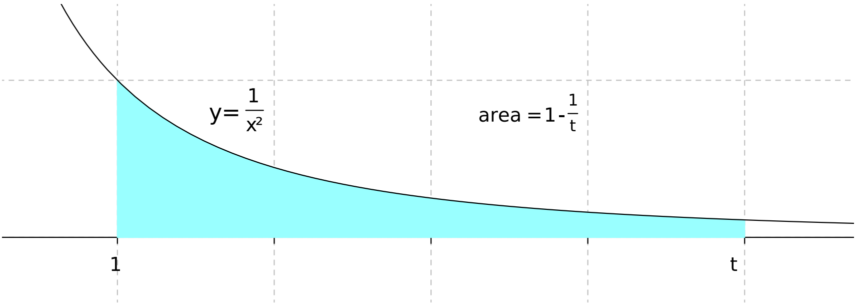
(b) f é contínua em $[a, b]$.

Temos uma integral imprópria quando

(a) o intervalo de integração é infinito ou,

(b) f possui uma descontinuidade infinita em $[a, b]$.

Considere a região S que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$. Para determinar a área de S, vamos considerar a parta que está à esquerda da reta $x = t$.



Nesse caso, temos

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1,$$

a área da região S é

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Integral Imprópria – Intervalos Infinitos

- Se $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo $t \geq a$, então escrevemos

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

quando o limite da direita existe (como um número).

- Se $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo $t \leq b$, então escrevemos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

quando o limite da direita existe (como um número).

Uma integral imprópria é chamada **convergente** se o limite correspondente existe. Se o limite não existe, a integral é referida como **divergente**.

Integral Imprópria – Intervalos Infinitos

- Se ambas $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ e $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ são convergentes, então escrevemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Aqui, qualquer número real a pode ser usado.

Exemplo 6

Calcule

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$$

Exemplo 6

Calcule

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$$

Resposta:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx = -1.$$

Exemplo 7

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Exemplo 7

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Resposta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Exemplo 8

Determine se a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

é convergente ou divergente.

Exemplo 8

Determine se a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

é convergente ou divergente.

Resposta: A integral imprópria é divergente.

Exemplo 9

Para quais valores de p a integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

é convergente?

Exemplo 9

Para quais valores de p a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

é convergente?

Resposta: A integral é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Integral Imprópria – Integrandos Descontínuos

- Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então escrevemos
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$
quando o limite da direita existe (como um número).
- Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então escrevemos
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$
quando o limite da direita existe (como um número).

Uma integral imprópria é chamada **convergente** se o limite correspondente existe. Se o limite não existe, a integral é referida como **divergente**.

Integral Imprópria – Integrando Descontínuo.

- Se f tiver uma descontinuidade em c, em que $a < c < b$ e ambas integrais impróprias $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ são convergentes, então escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo 10

Calcule, se possível, a integral imprópria

$$I = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$$

Exemplo 10

Calcule, se possível, a integral imprópria

$$I = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx.$$

Resposta: $I = 2\sqrt{3}$.

Exemplo 11

Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx,$$

se possível.

Exemplo 11

Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx,$$

se possível.

Resposta: A integral é divergente.

Exemplo 12

Calcule

$$I = \int_0^1 \ln x dx,$$

se possível.

Dica:

Lembre-se da Aula 21 - Integração por partes, que

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c.$$

Exemplo 12

Calcule

$$I = \int_0^1 \ln x dx,$$

se possível.

Dica:

Lembre-se da Aula 21 - Integração por partes, que

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c.$$

Resposta: $\int \ln x dx = -1.$

Teorema 13 (Teorema de Comparação)

Suponha que f e g sejam funções contínuas com

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad x \geq a.$$

- *Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente.*
- *Se $\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente.*

Um teorema semelhante é válido para integrais impróprias com descontinuidade no integrando.

Exemplo 14

Mostre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

é convergente.

Exemplo 15

Mostre que

$$\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$$

é divergente.

Considerações Finais

Iniciamos a aula de hoje com algumas dicas para calcular integrais.

Observamos que somente podemos calcular a integral de funções elementares. $f(x) = e^{-x^2}$ é um exemplo de função não elementar.

Depois, apresentamos o conceito de integral imprópria que surge quando o intervalo de integração é infinito ou o integrando é uma função descontínua.

Muito grato pela atenção!