

MA111 - Cálculo I

Aula 24 - Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Nas aulas anteriores apresentamos o teorema fundamental do cálculo e o conceito de integral indefinida.

Depois apresentamos as técnicas de substituição e integração por partes.

Vimos também as substituições trigonométricas e técnicas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Na aula de hoje, veremos como integrar funções racionais usando frações parciais.

Primeiramente, vamos considerar funções racionais próprias, ou seja,

$$f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)},$$

em que $R(x)$ e $Q(x)$ são polinômios tais que o **grau de R seja menor que o grau de Q** .

Estratégia:

- Expressar o denominador Q como produto de fatores:
 - lineares da forma $ax + b$,
 - quadráticos irredutíveis da forma $ax^2 + bx + c$, com $b^2 - 4ac < 0$.
- Escrever a função racional como uma soma de **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{ax + b}, \quad \frac{Ax + B}{(ax + b)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Exemplo 1

Encontre

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx,$$

para $a \neq 0$.

Exemplo 1

Encontre

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx,$$

para $a \neq 0$.

Resposta:

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c.$$

Exemplo 2

Calcule

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx.$$

Exemplo 2

Calcule

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx.$$

Resposta:

$$\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x - 1| - \frac{1}{10} \ln |x + 2| + c.$$

No caso em que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios mas o **grau de R não é menor que o grau de Q** , devemos escrever

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

com o grau de R menor que o grau de Q e aplicar a estratégia anterior.

Exemplo 3

Encontre

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

Exemplo 3

Encontre

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

Resposta:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x - 1| + c.$$

Exemplo 4

Encontre

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

Exemplo 4

Encontre

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

Resposta:

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$$

Exemplo 5

Calcule

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Exemplo 5

Calcule

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Resposta:

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c.$$

Exemplo 6

Calcule

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

Exemplo 6

Calcule

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

Resposta:

$$x + \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}} \right) + c.$$

Exemplo 7

Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

Exemplo 7

Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

Resposta:

$$2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + c.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos como as frações parciais podem ser usadas para calcular integrais envolvendo funções racionais.

Na próxima aula, faremos um resumo das técnicas de integração.

Na próxima aula também discutiremos as integrais impróprias, que surgem quando o integrando possui uma descontinuidade e/ou integramos sobre um intervalo de comprimento infinito.

Muito grato pela atenção!