

# MA111 - Cálculo I

Aula 24 - Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle

Nas aulas anteriores apresentamos o teorema fundamental do cálculo e o conceito de integral indefinida.

---

Depois apresentamos as técnicas de substituição e integração por partes.

---

Vimos também as substituições trigonométricas e técnicas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

---

Na aula de hoje, veremos como integrar funções racionais usando frações parciais.

Primeiramente, vamos considerar funções racionais próprias, ou seja,

$$f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)},$$

em que  $R(x)$  e  $Q(x)$  são polinômios tais que o **grau de  $R$  seja menor que o grau de  $Q$** .

## Estratégia:

- Expressar o denominador  $Q$  como produto de fatores:
  - lineares da forma  $ax + b$ ,
  - quadráticos irredutíveis da forma  $ax^2 + bx + c$ , com  $b^2 - 4ac < 0$ .
- Escrever a função racional como uma soma de **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{ax + b}, \quad \frac{Ax + B}{(ax + b)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

## Exemplo 1

Encontre

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx,$$

para  $a \neq 0$ .

## Exemplo 1

Encontre

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx,$$

para  $a \neq 0$ .

**Resposta:**

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c.$$

## Exemplo 2

Calcule

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx.$$

## Exemplo 2

Calcule

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x - 1| - \frac{1}{10} \ln |x + 2| + c.$$



No caso em que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

em que  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinômios mas o **grau de  $R$  não é menor que o grau de  $Q$** , devemos escrever

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

com o grau de  $R$  menor que o grau de  $Q$  e aplicar a estratégia anterior.

### Exemplo 3

Encontre

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

### Exemplo 3

Encontre

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

**Resposta:**

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x - 1| + c.$$

## Exemplo 4

Encontre

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

## Exemplo 4

Encontre

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

**Resposta:**

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$$

## Exemplo 5

Calcule

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

## Exemplo 5

Calcule

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

**Resposta:**

$$\ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) + c.$$

## Exemplo 6

Calcule

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$



## Exemplo 6

Calcule

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

**Resposta:**

$$x + \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2x - 1}{\sqrt{2}} \right) + c.$$

## Exemplo 7

Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

## Exemplo 7

Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

**Resposta:**

$$2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + c.$$

## Considerações Finais

---

Na aula de hoje, vimos como as frações parciais podem ser usadas para calcular integrais envolvendo funções racionais.

---

Na próxima aula, faremos um resumo das técnicas de integração.

---

Na próxima aula também discutiremos as integrais impróprias, que surgem quando o integrando possui uma descontinuidade e/ou integramos sobre um intervalo de comprimento infinito.

Muito grato pela atenção!