MA111 - Cálculo I

Aula 23 - Substituição Trigonométrica. Comprimento de Arco.

Marcos Eduardo Valle

Nas aulas anteriores apresentamos o teorema fundamental do cálculo e o conceito de integral indefinida.

Depois apresentamos as técnicas de substituição e integração por partes.

Vimos também algumas técnicas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Na aula de hoje, veremos que as funções trigonométricas podem ser utilizadas para resolver integrais que não envolvem explicitamente funções trigonométricas.

Veremos também como calcular comprimento de uma curva dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Substituição Trigonométrica - 1

Quando surgir no integrando uma expressão envolvendo

$$\sqrt{a^2 - x^2},$$

substituir

$$x = a \operatorname{sen} \theta,$$

para

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nesse caso,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta,$$

e

$$dx = a \cos \theta d\theta.$$

Exemplo 1

Calcule
$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx.$$

Lembre-se que
$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \int cossec^2\theta d\theta = -\operatorname{cotg}\theta.$$

Exemplo 1

Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx.$$

Lembre-se que

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \int cossec^2\theta d\theta = -\operatorname{cotg}\theta.$$

Resposta:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c.$$

Exemplo 2

Calcule
$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

Exemplo 2

Calcule
$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

Resposta:

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

Substituição Trigonométrica - 2

Quando surgir no integrando uma expressão envolvendo

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

substituir

$$x = a \operatorname{tg} \theta,$$

para

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nesse caso,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta,$$

e

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta.$$

Exemplo 3

Encontre
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx.$$

Exemplo 3

Encontre

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx.$$

Resposta:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c.$$

Exemplo 4

Encontre

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx.$$

Exemplo 4

Encontre
$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}} dx.$$

Resposta:
$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}} dx = \frac{3}{32}.$$

Substituição Trigonométrica - 3

Quando surgir no integrando uma expressão envolvendo

$$\sqrt{x^2 - a^2},$$

substituir

$$x = a \sec \theta,$$

para

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad ou \quad \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Nesse caso,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} \theta,$$

e

$$dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta.$$

Exemplo 5

Calcule

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

Lembre-se que

$$\int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$$

Exemplo 5

Calcule

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

Lembre-se que

$$\int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$$

Resposta:

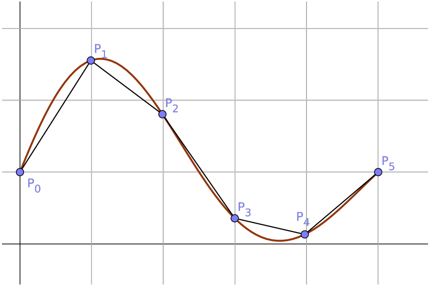
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c.$$

Comprimento de Arco

O comprimento L de uma curva $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$, pode ser escrito como o limite:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1} P_i|,$$

conforme mostra a figura abaixo para $n = 5$.



Se tomarmos $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$, pelo teorema de Pitágoras, temos

$$|P_i P_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Se f tem derivada contínua, pelo teorema do valor médio obtemos

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \quad \Longrightarrow \quad \Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x,$$

em que x_i^* é um ponto entre x_{i-1} e x_i.

Finalmente, pela definição de integral definida, temos

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)}\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Teorema 6 (Comprimento do Arco)

Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento de arco L da curva $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$, é dado pela equação

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplo 7

Calcule o comprimento de arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Teorema 6 (Comprimento do Arco)

Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento de arco L da curva $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$, é dado pela equação

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplo 7

Calcule o comprimento de arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Resposta: O comprimento de arco é

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje discutimos as substituições trigonométricas para o cálculo de integrais.

Apresentamos também a fórmula para o comprimento de arco da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Muito grato pela atenção!