MA111 - Cálculo I

Aula 22 - Integrais Trigonométricas

Marcos Eduardo Valle

Nas aulas anteriores apresentamos o teorema fundamental do cálculo e o conceito de integral indefinida.

Depois apresentamos as técnicas de substituição e integração por partes.

Na aula de hoje, continuaremos estudando técnicas de integração.

Especificamente, veremos como usar identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Exemplo 1

Calcule
$$\int \cos^3 x dx.$$

Exemplo 1

Calcule

$$\int \cos^3 x dx.$$

Resposta: Tomando $u = \operatorname{sen} x$ e lembrando que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, obtemos

$$\int \cos^3 x dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + c.$$

Ideia:

Escrever potências de seno e cosseno de forma que tenhamos:

- Um fator seno e o restante em termos do cosseno;
- Um fator cosseno e o restante em termos do seno.

Fórmulas úteis:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Exemplo 2

Calcule

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x dx.$$

Exemplo 2

Calcule

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x dx.$$

Resposta:

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c.$$

Exemplo 3

Calcule
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx.$$

Exemplo 3

Calcule

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx.$$

Resposta:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Exemplo 4

Encontre

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx.$$

Exemplo 4

Encontre
$$\int \operatorname{sen}^4 x dx.$$

Resposta:

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + c.$$

Exemplo 5

Calcule

$$\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx.$$

Lembre-se que

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x.$$

Exemplo 5

Calcule

$$\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx.$$

Lembre-se que

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x,$$
$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x.$$

Resposta:

$$\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + c.$$

Exemplo 6

Encontre

$$\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta d\theta.$$

Exemplo 6

Encontre

$$\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta d\theta.$$

Resposta:

$$\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta d\theta = \frac{1}{11}\sec^{11}\theta - \frac{2}{9}\sec^9\theta + \frac{1}{7}\sec^9\theta + c.$$

Vejam no livro quadro resumo com estratégias para calcular

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx \quad \text{e} \quad \int \operatorname{tg}^m \sec^n x dx.$$

Em alguns casos, temos que recorrer à integração por partes, substituições mais elaboradas, ou usar as identidades

$$\int \operatorname{tg} x dx = \ln|\sec x| + c,$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$$

Exemplo 7

Encontre

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

Exemplo 7

Encontre

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

Resposta:

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\sec x| + c$$

Exemplo 8

Calcule, usando integração por partes, a integral indefinida

$$\int \sec^3 x dx.$$

Exemplo 8

Calcule, usando integração por partes, a integral indefinida

$$\int \sec^3 x dx.$$

Resposta:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + c$$

Para calcular integrais do tipo:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$,

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} mx \cos nx dx$,

(c) $\displaystyle\int \cos mx \cos nx dx$,

use uma das seguintes identidades:

(i) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$,

(ii) $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$,

(iii) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$.

Exemplo 9

Encontre

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x dx.$$

Exemplo 9

Encontre

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x dx.$$

Resposta:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{9}\cos 9x\right) + c$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos algumas técnicas de integração envolvendo funções trigonométricas.

Na próxima aula, veremos que certas integrais podem ser calculadas utilizando uma substituição trigonométrica.

Muito grato pela atenção!