MA111 - Cálculo I

Aula 21 - Integração por partes. Integração de Funções Simétricas. O Logaritmo como uma Integral.

Marcos Eduardo Valle

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), apresentado nas aulas anteriores, estabelece que

1. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$, para $a \leq x \leq b$.
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$, em que F é uma primitiva qualquer de f.

Em aulas anteriores também introduzimos a integral indefinida:

$$F(x) = \int f(x)dx \quad \text{é equivalente à} \quad F'(x) = f(x).$$

Na aula de hoje, veremos a técnica de integração por partes.

Motivação

Da regra do produto, temos

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Usando a notação de integral indefinida, encontramos

$$f(x)g(x) = \int \left(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right) dx,$$

ou ainda,

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx.$$

Rearranjando os termos, encontramos:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Integração por Partes

Integração por Partes

A fórmula de integração por partes é:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Alternativamente, tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Exemplos

Exemplo 1

Encontre

$$\int x \operatorname{sen} x \; dx.$$

Exemplos

Exemplo 1

Encontre
$$\int x \operatorname{sen} x \; dx.$$

Resposta:

$$\int x \operatorname{sen} x \; dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

Exemplos

Exemplo 2

Calcule
$$\int \ln x dx.$$

Exemplos

Exemplo 2

Calcule
$$\int \ln x dx.$$

Resposta:
$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c.$$

Exemplos

Exemplo 3

Encontre
$$\int t^2 e^t dt.$$

Exemplos

Exemplo 3

Encontre

$$\int t^2 e^t dt.$$

Resposta:

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + c.$$

Exemplos

Exemplo 4

Calcule
$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Exemplos

Exemplo 4

Calcule
$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx.$$

Resposta:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

Integração por Partes

Integração por Partes

A integração por partes para uma integral **definida** é

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Exemplos

Exemplo 5

Calcule
$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x dx.$$

Exemplos

Exemplo 5

Calcule
$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x dx.$$

Resposta:
$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exemplos

Exemplo 6

Demonstre a fórmula de redução

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx,$$

em que $n \geq 2$ é um inteiro.

Observação:

A fórmula de redução pode ser aplicada repetidas vezes para expressar $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x \, dx$ ou $\int dx$.

Simetria

Teorema 7 (Integrais de Funções Simétricas)

Seja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

- *Se f* ***é par****, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

- *Se f* ***é ímpar****, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Simetria

Exemplo 8

Calcule
$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1) dx.$$

Simetria

Exemplo 8

Calcule
$$\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx.$$

Resposta: Como o integrando é uma função par, temos

$$\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx = 2\int_{0}^{2}(x^6+1)dx = 2\left(\frac{2^7}{7}+2\right) = \frac{284}{7}.$$

Simetria

Exemplo 9

Determine
$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4} dx.$$

Simetria

Exemplo 9

Determine
$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4} dx.$$

Resposta: Como o integrando é uma função par, temos
$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4} dx = 0.$$

O Logaritmo como uma Integral

A função logaritmo pode ser definida usando uma integral:

Definição 10 (Logaritmo Natural)

A função logaritmo natural é definida pela equação

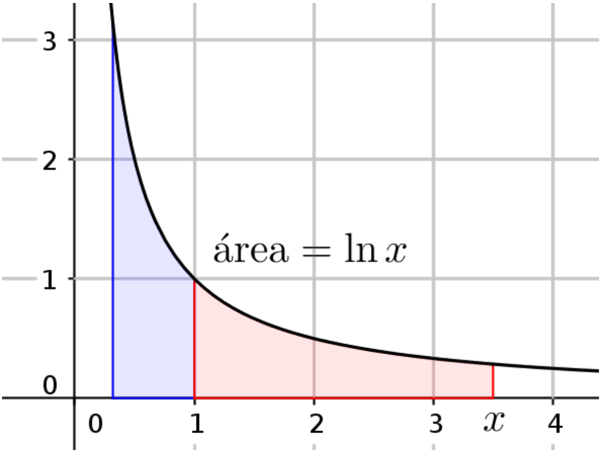
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dx, \quad x > 0.$$

Observação:

A integral existe porque $f(t) = 1/t$ é contínua nos intervalos de integração $[x, 1]$ e $[1, x]$, para qualquer $x > 0$. Além disso,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$

Interpretação geométrica de $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dx$:



Corolário 11

Pelo teorema fundamental do cálculo - parte 1, temos

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Propriedades:

Se x e y forem reais positivos e r for um racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
2. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.
3. $\ln(x^r) = r \ln x$.

Função Exponencial

A função exponencial é definida como a inversa da função ln.

Definição 12 (Função Exponencial)

A função exponencial é definida de modo que:

$$y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad \ln y = x.$$

Propriedades:

Se x e y forem reais e r for um racional, então

1. $e^{x+y} = e^x e^y$.
2. $(e^x)^r = e^{rx}$.
3. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos a técnica de integração por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Destacamos que podemos utilizar a simetria da função no cálculo de integrais.

Por fim, vimos também que podemos definir a função logaritmo utilizando uma integral.

Muito grato pela atenção!