

# MA111 - Cálculo I

Aula 20 - A regra de substituição.  
Área entre curvas.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle

Na aula anterior vimos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

---

Resumidamente, o TFC diz que, se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então

1.  $\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$ , para  $a \leq x \leq b$ .
  2.  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ , em que  $F$  é uma primitiva qualquer de  $f$ .
- 

Apresentamos também a notação de integral indefinida:

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \text{é equivalente à} \quad F'(x) = f(x).$$

---

Na aula de hoje, veremos como fazer uma substituição numa integral.

## Regra da Substituição

---

Suponha que queremos calcular a integral indefinida

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

Tomando  $u = g(x)$ , temos que

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)dx.$$

Logo,

$$\int \underbrace{f(g(x))}_u \underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du$$

# Regra da Substituição

---

## Exemplo 1

Determine

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx.$$

# Regra da Substituição

---

## Exemplo 1

Determine

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + c.$$

# Regra da Substituição

---

## Exemplo 2

Encontre

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 2

Encontre

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + c.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 3

Calcule

$$\int_0^4 \sqrt{2x + 1} dx.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 3

Calcule

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{26}{3}.$$

Os seguintes teoremas formalizam a regra de substituição.

#### Teorema 4 (Integrais Indefinidas)

*Se  $u = g(x)$  for uma função derivável cuja imagem é um intervalo  $I$  e  $f$  for contínua em  $I$ , então*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

#### Teorema 5 (Integrais Definidas)

*Se  $g'$  for uma função contínua em  $[a, b]$  e  $f$  for contínua na imagem de  $u = g(x)$ , então*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

# Regra da Substituição

---

## Exemplo 6

Encontre

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 6

Encontre

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{1}{4}.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 7

Determine

$$\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 7

Determine

$$\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c.$$

# Regra da Substituição

---

## Exemplo 8

Calcule

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 8

Calcule

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

**Resposta:**

$$- \ln |\cos x| + c$$

ou

$$\ln |\sec x| + c.$$

## Regra da Substituição

---

### Exemplo 9

Calcule

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

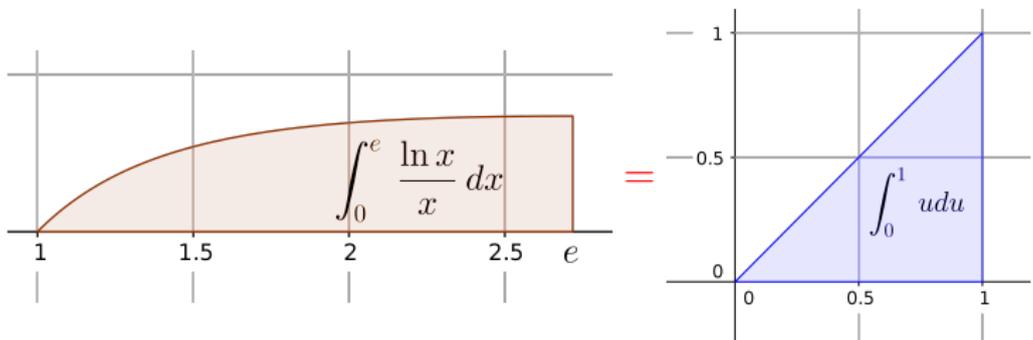
# Regra da Substituição

## Exemplo 9

Calcule

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

**Resposta:**  $I = \frac{1}{2}$ . Interpretação geométrica:



## Área entre Curvas

---

Vimos que a integral  $\int_a^b f(x)dx$  de uma função não-negativa fornece a área abaixo da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .

---

No caso geral, tem-se o seguinte resultado:

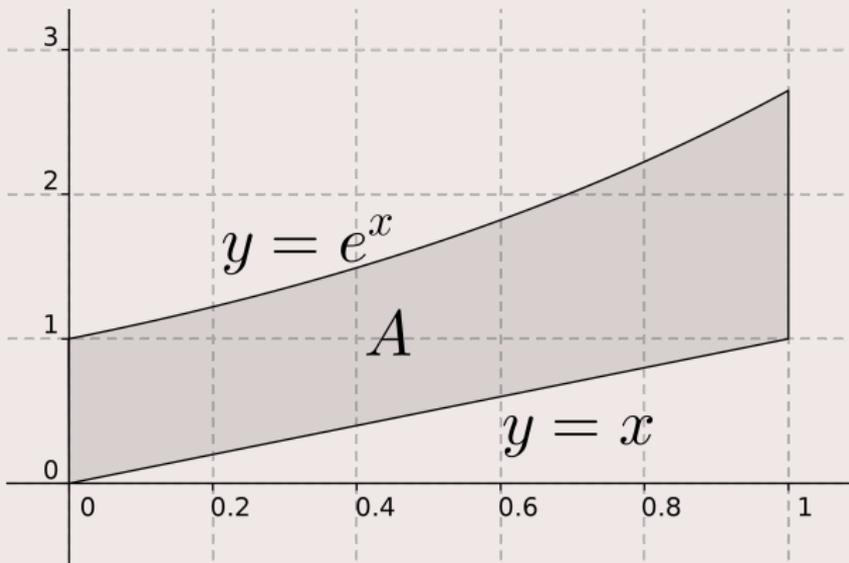
### Definição 10

A área entre as curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$  é

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

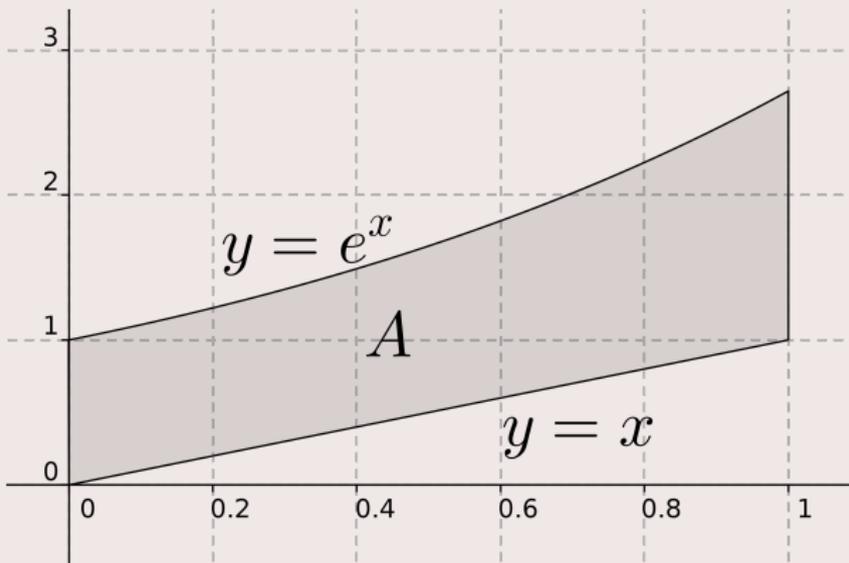
## Exemplo 11

Encontre a área da região limitada por  $y = e^x$  e  $y = x$ , e  $x = 0$  e  $x = 1$ .



## Exemplo 11

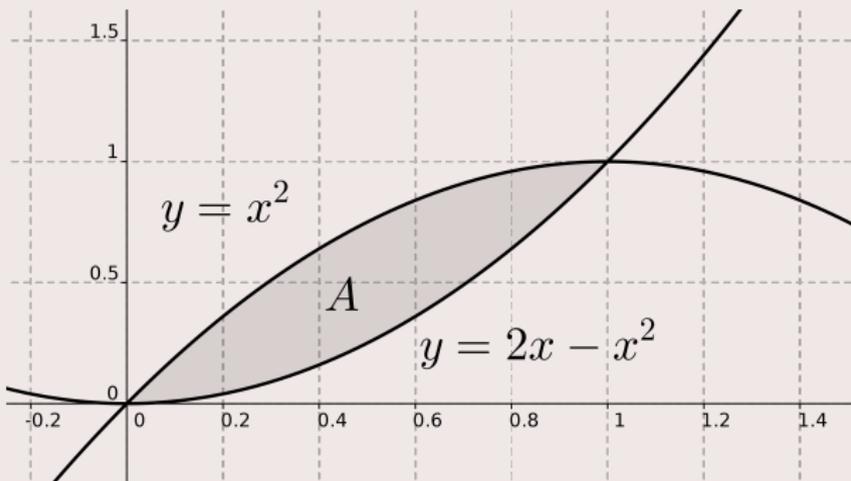
Encontre a área da região limitada por  $y = e^x$  e  $y = x$ , e  $x = 0$  e  $x = 1$ .



**Resposta:**  $A = e - 3/2$ .

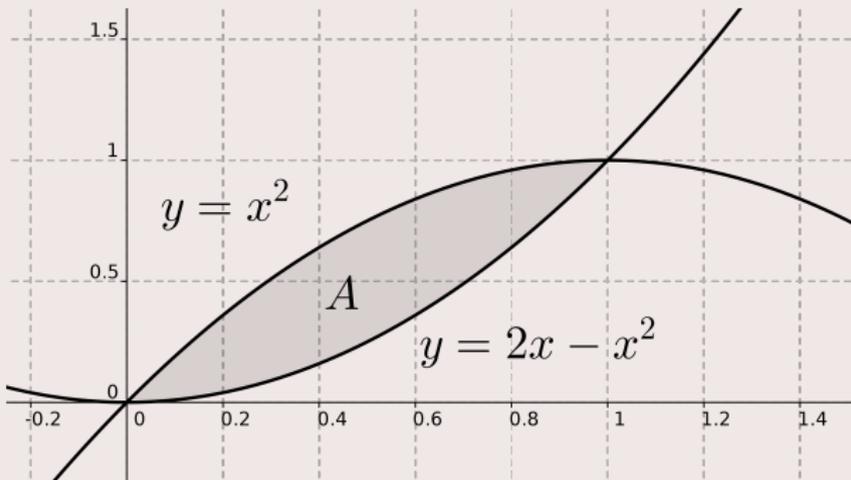
## Exemplo 12

Encontre a área da região entre as parábolas  $y = x^2$  e  $y = 2x - x^2$ .



## Exemplo 12

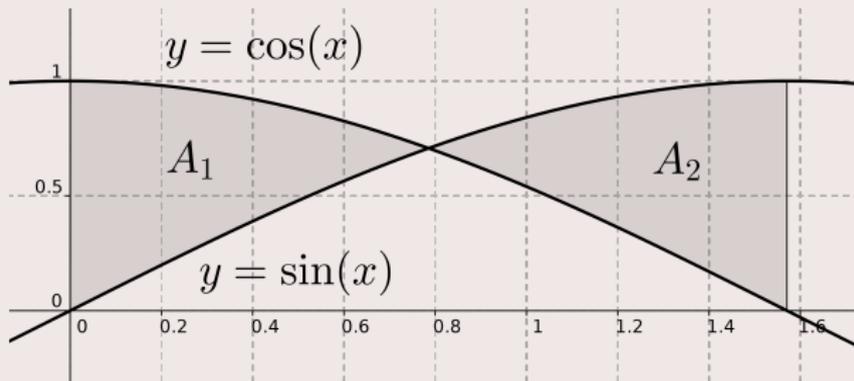
Encontre a área da região entre as parábolas  $y = x^2$  e  $y = 2x - x^2$ .



**Resposta:**  $A = 1/3$ .

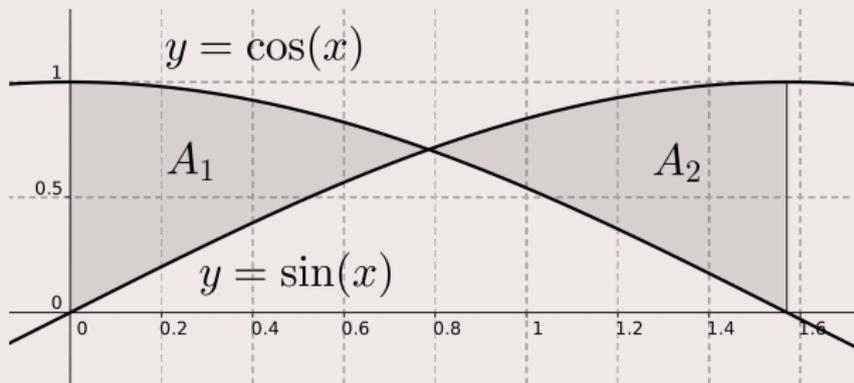
## Exemplo 13

Encontre a área da região limitada pelas curvas  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  e  $x = \pi/2$ .



## Exemplo 13

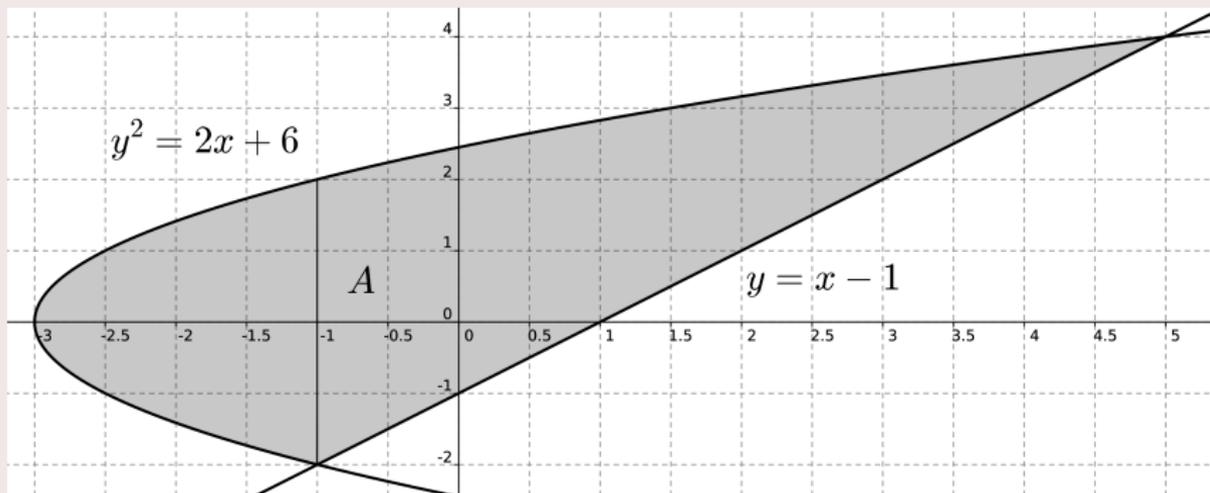
Encontre a área da região limitada pelas curvas  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  e  $x = \pi/2$ .



**Resposta:**  $A = A_1 + A_2 = 2\sqrt{2} - 2$ .

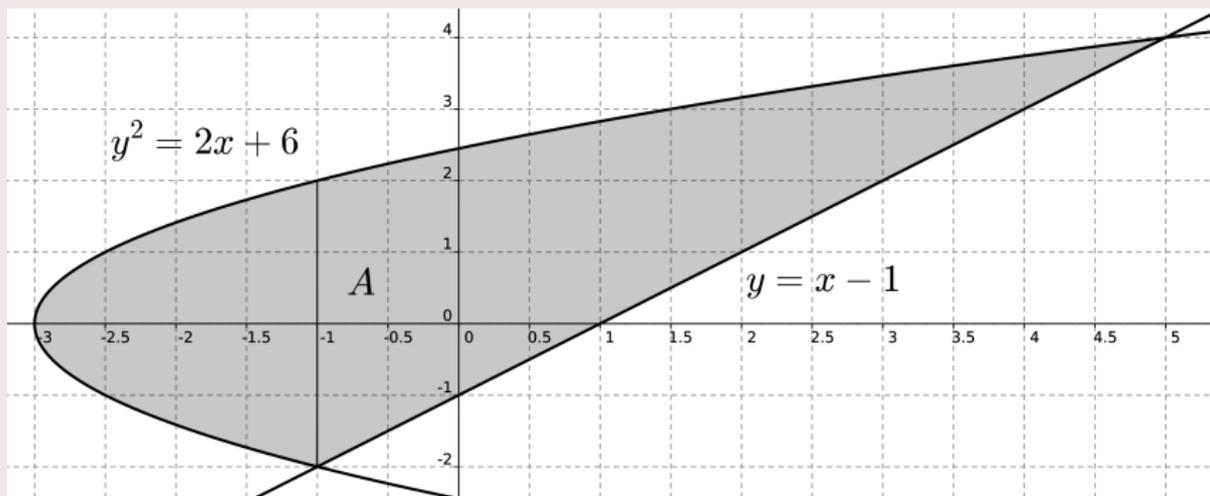
## Exemplo 14

Encontre a área da região limitada pela reta  $y = x - 1$  e pela parábola  $y^2 = 2x + 6$ .



## Exemplo 14

Encontre a área da região limitada pela reta  $y = x - 1$  e pela parábola  $y^2 = 2x + 6$ .



**Resposta:**  $A = 18$ .

## Considerações Finais

---

Na aula de hoje, apresentamos a regra de substituição que, resumidamente, pode ser escrita como:

1. Integral indefinida:  $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$

2. Integral indefinida:  $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$

---

Na aula de hoje vimos também que a área as curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  e delimitada as retas  $x = a$  e  $x = b$  é dada pela integral

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Muito grato pela atenção!