

# MA111 - Cálculo I

Aula 2 - Funções Inversas, Trigonométricas, Exponenciais e Logarítmicas.



**UNICAMP**

Marcos Eduardo Valle

# Funções Injetoras

---

## Definição 1

Uma função é injetora se

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

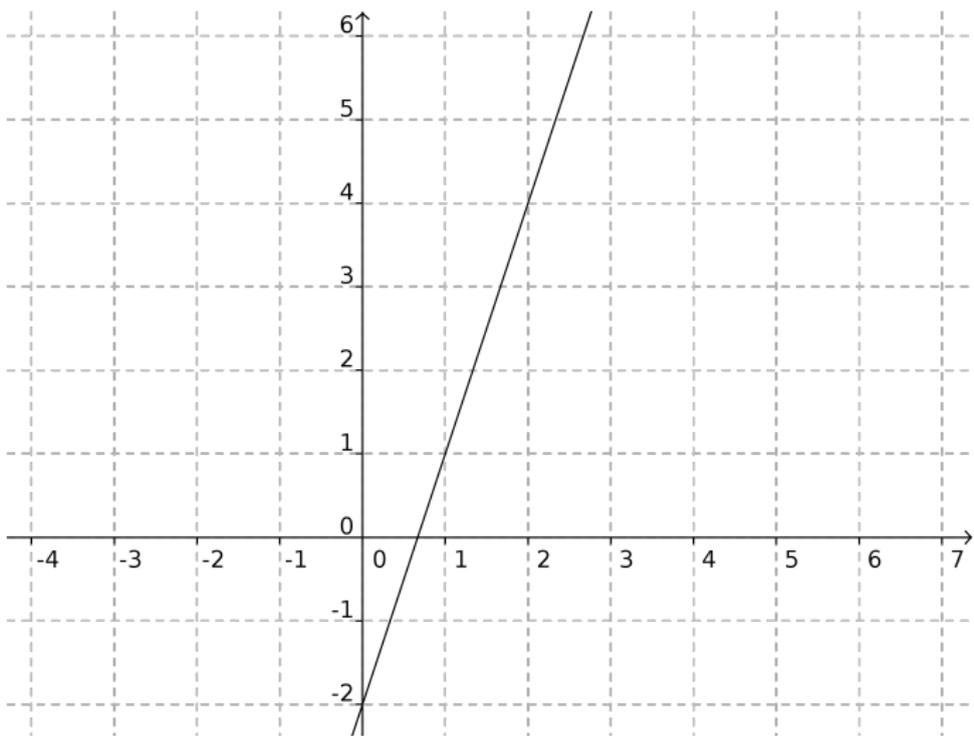
ou

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

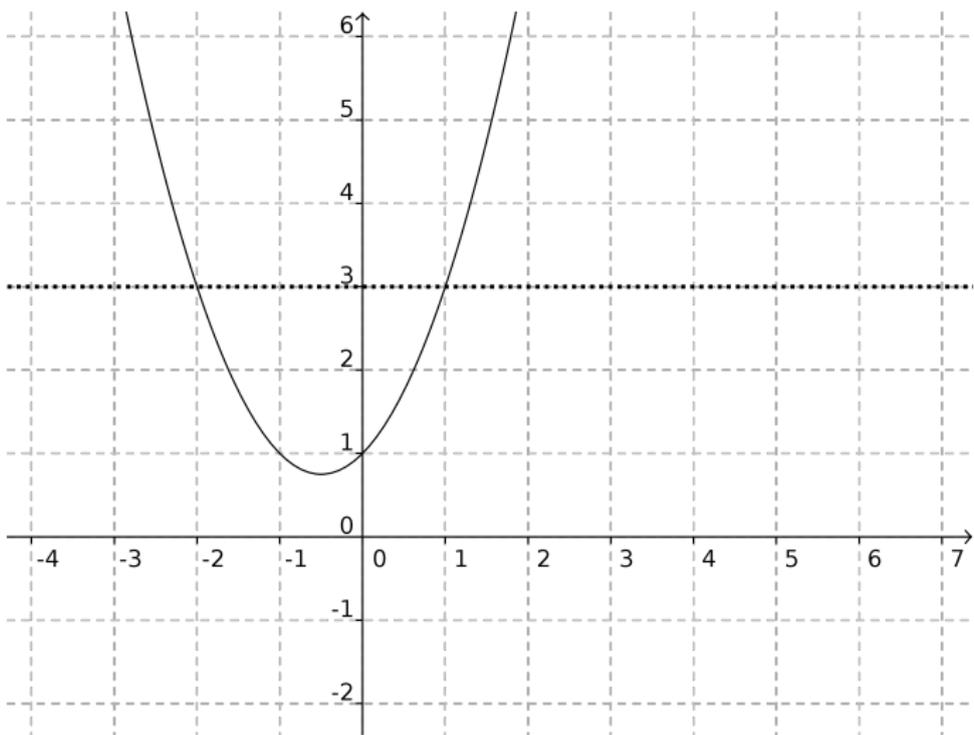
## Teste da Reta Horizontal

Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto!

A figura abaixo mostra o gráfico da função injetora  $f(x) = 3x - 2$ .



Abaixo apresentamos o gráfico da função  $f(x) = x^2 + x + 1$ , que não é injetora. Com efeito, temos  $x_1 \neq x_2$  mas  $f(x_1) = 3 = f(x_2)$  para  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 1$ .



# Função Inversa

---

Seja  $f$  uma função **injetora** com **domínio**  $A$  e **imagem**  $B$ . A inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , é **a** função tal que

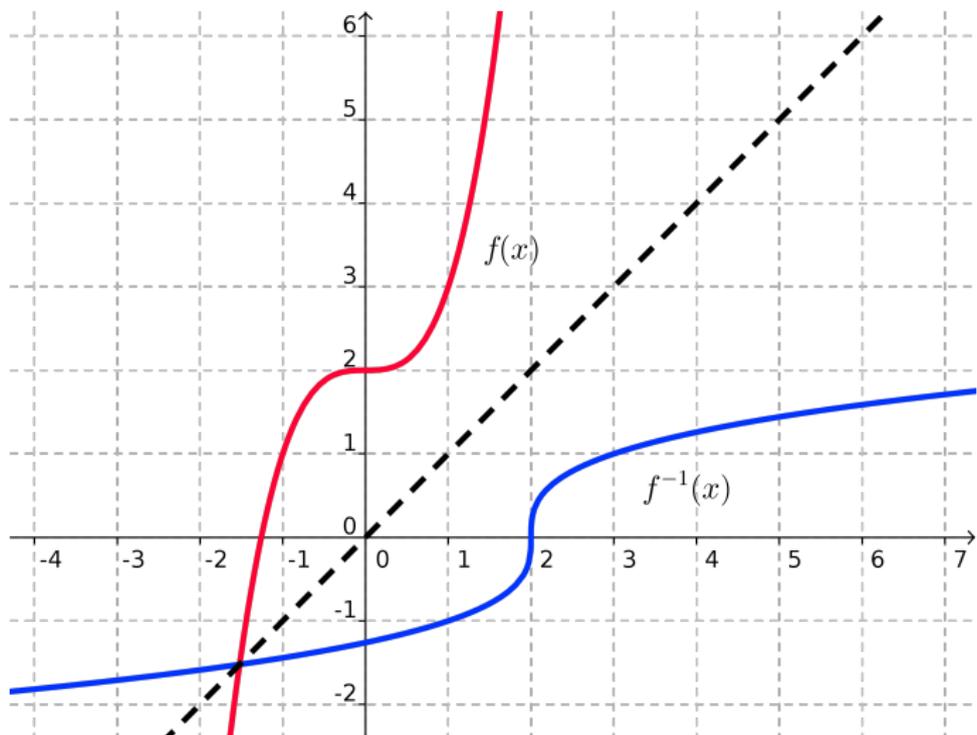
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

## Equações de Cancelamento

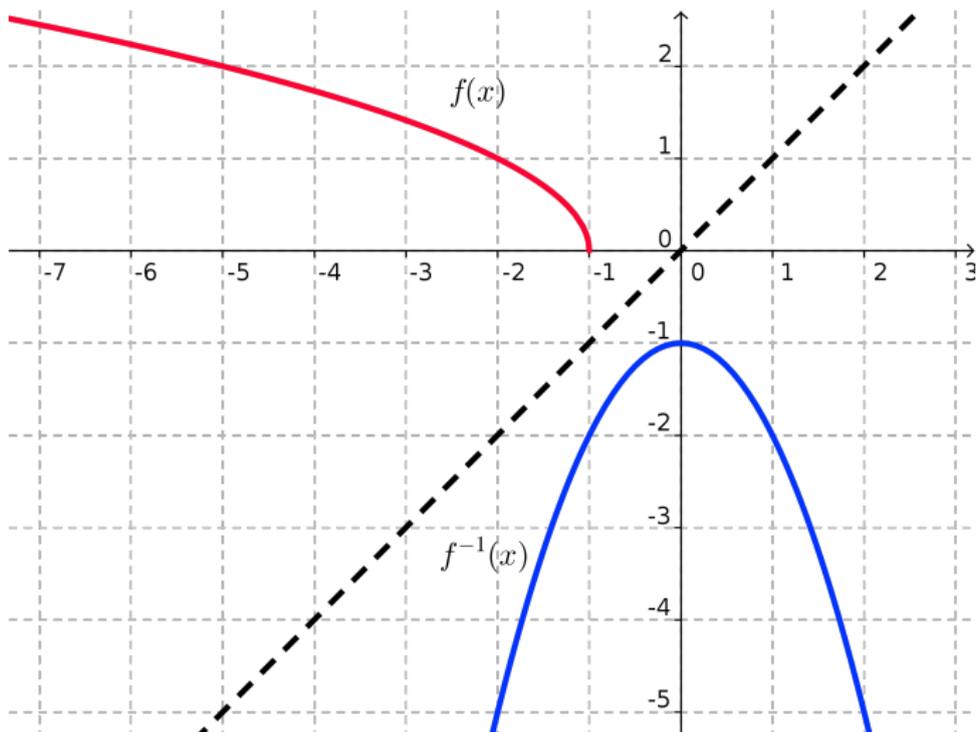
$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A.$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B.$$

A inversa da função  $f(x) = x^3 + 2$  é  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$ .



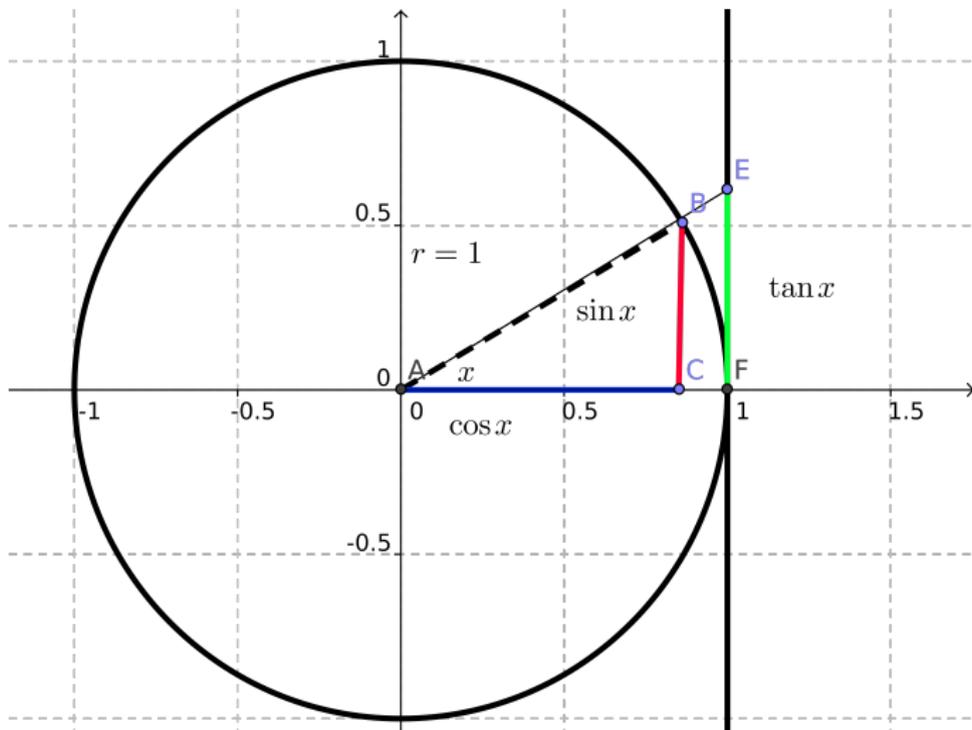
A inversa da função  $f(x) = \sqrt{-x-1}$  é  $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$ .



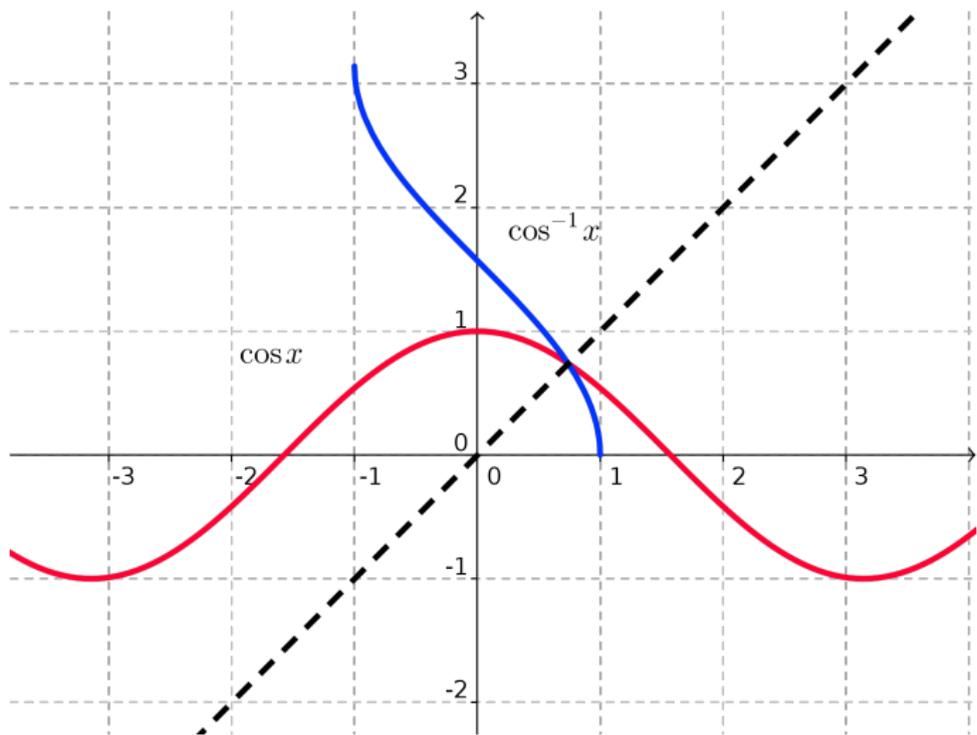
Domínio e imagem de  $f$  são os conjuntos  $A = \{x : x \leq -1\}$  e  $B = \{x : x \geq 0\}$ .

# Funções Trigonométricas

---

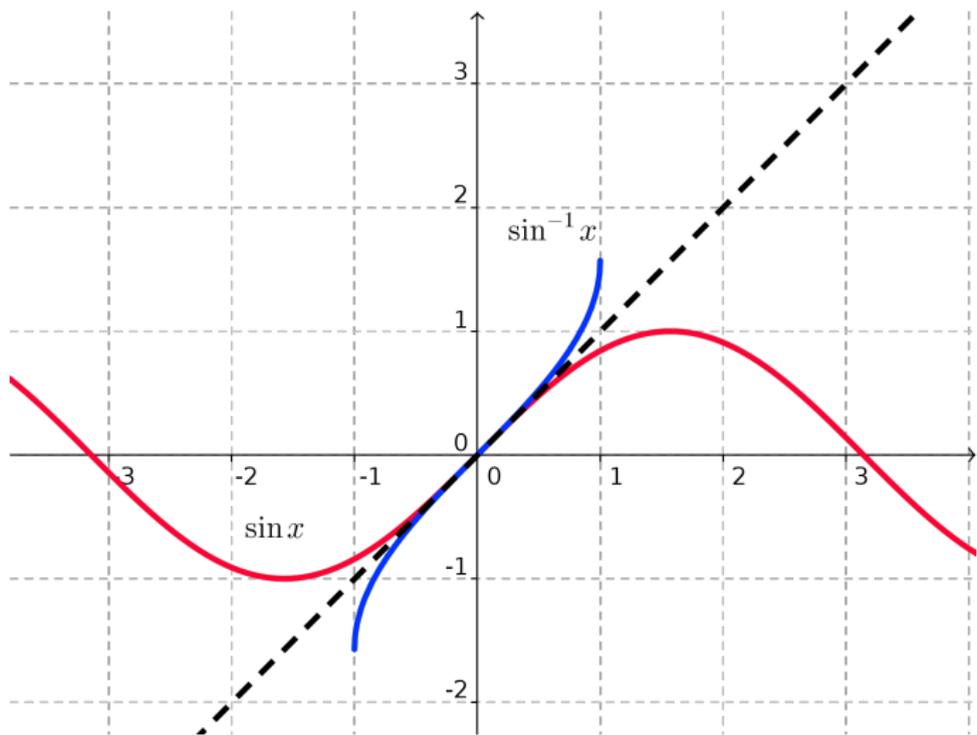


A inversa da função  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$  é  $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ .



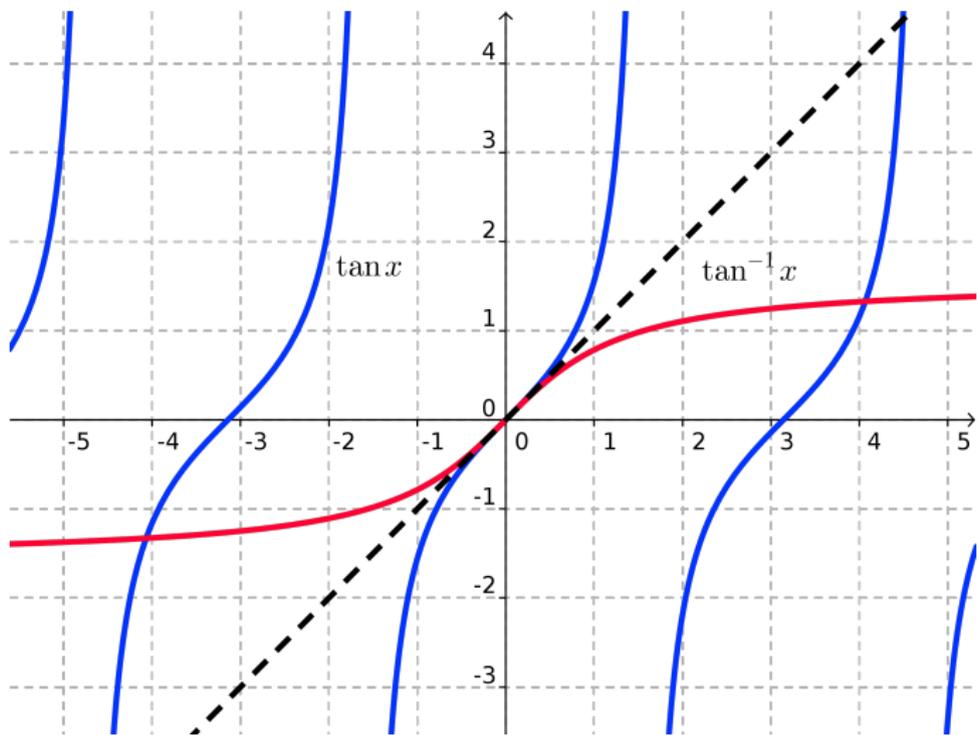
**Cuidado:**  $\cos^{-1} x \neq \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$ .

Se  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ , então  $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ .



**Cuidado:**  $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$ .

Se  $f(x) = \tan x$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , então  $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ .



**Cuidado:**  $\tan^{-1} x \neq \frac{1}{\tan x} = (\tan x)^{-1}$ .

# Função Exponencial

---

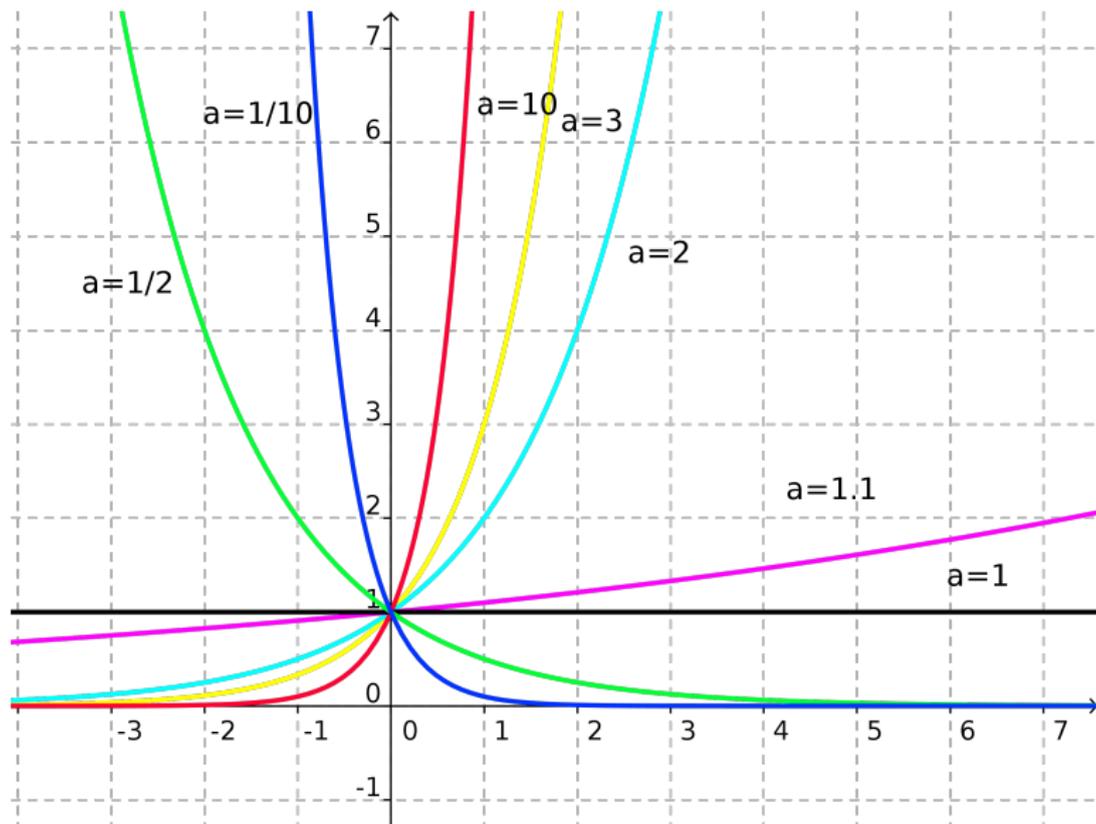
$$f(x) = a^x, a > 0.$$

- Se  $x = 0$ ,  $a^0 = 1$ .
- Se  $x = n$ ,  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-vezes}}$ .
- Se  $x = -n$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .
- Se  $x = p/q$ ,  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ .

## Propriedades:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{e} \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

## Gráfico da função exponencial para diferentes valores de $a$ :



## Função Logaritmo - Inversa da Exponencial

---

$$f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

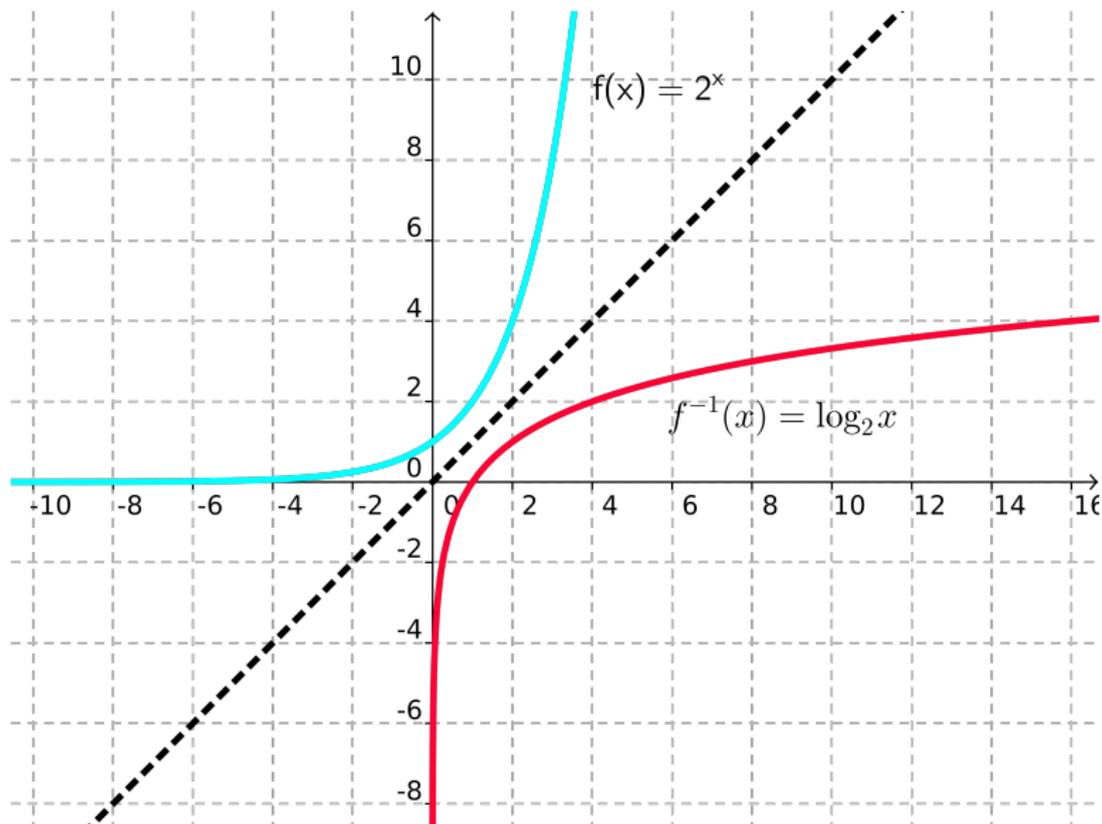
### Propriedades:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

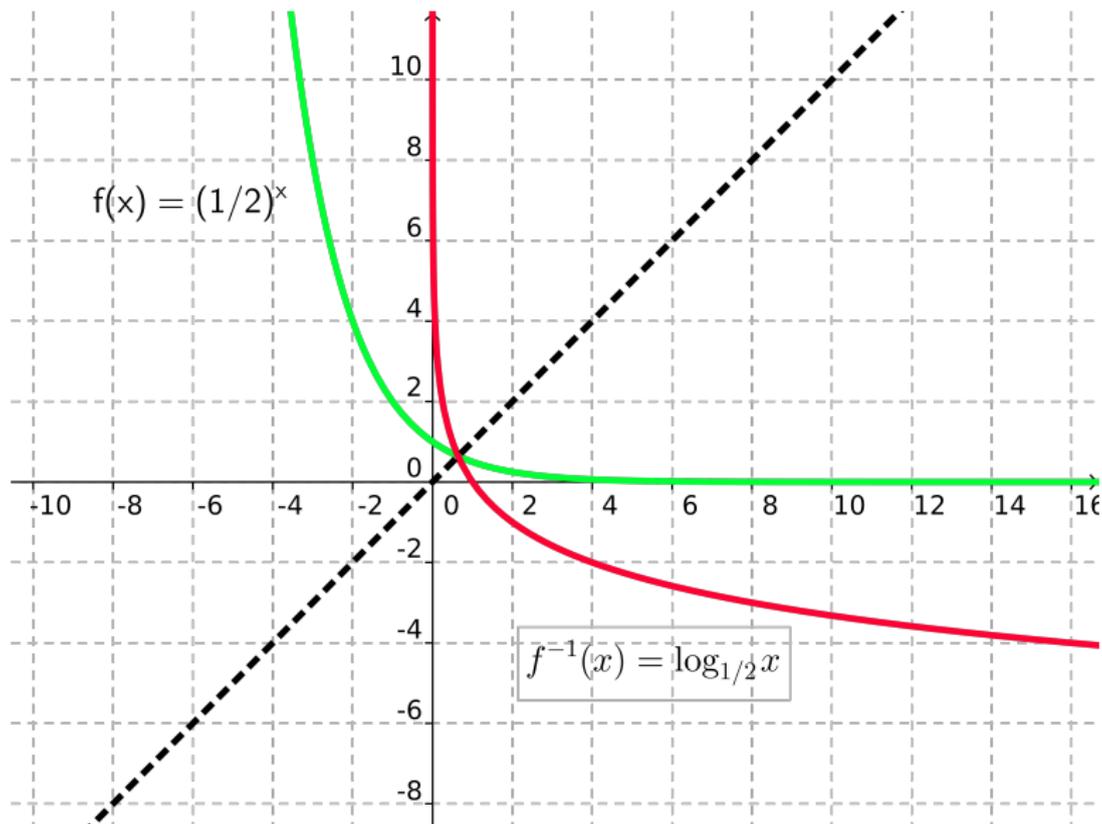
$$\log_a(x^r) = r \log_a x.$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

## Gráfico da função logaritmo para $a = 2$ :

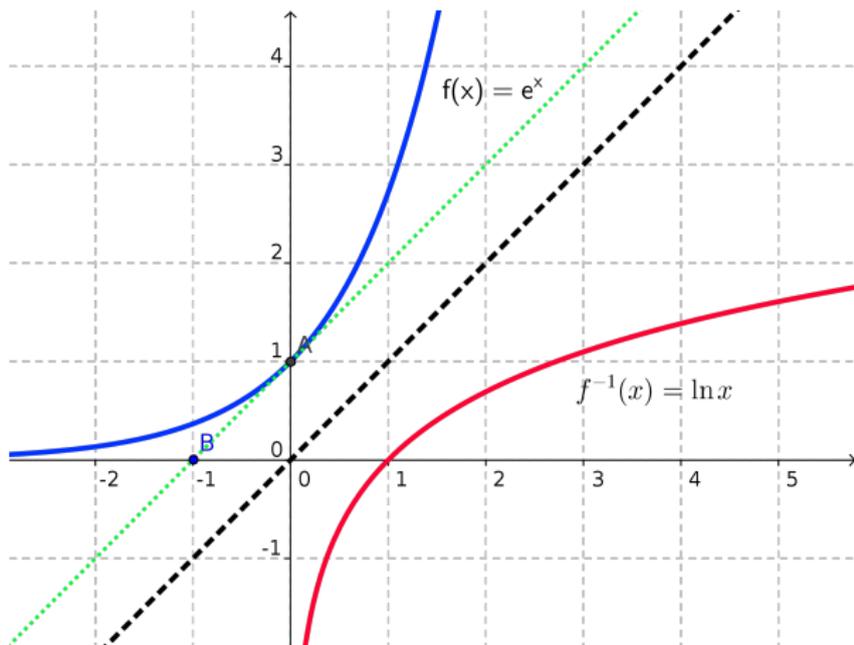


# Gráfico da função logaritmo para $a = 1/2$ :



# Número e

O número  $e$  é a base tal que a reta tangente ao gráfico da função exponencial em  $(0, 1)$  tem inclinação 1. **Escrevemos  $\log_e x = \ln x$ .**



## Considerações Finais

---

Na aula de hoje revisamos os conceitos de função injetora e a inversa de uma função.

---

Apresentamos as inversa das funções trigonométricas  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\tan x$ .

---

Na aula de hoje também revisamos as funções exponenciais e logarítmicas.

---

Destacamos, em particular, que o número  $e$  é definido como a base tal a tangente ao gráfico da função exponencial no ponto  $(0, 1)$  tem inclinação 1.

Muito grato pela atenção!