MA111 - Cálculo I

Aula 19 - Teorema Fundamental do Cálculo e Integrais Indefinidas

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula de hoje, estuaremos o teorema fundamental do cálculo.

O teorema fundamental do cálculo (TFC) estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral.

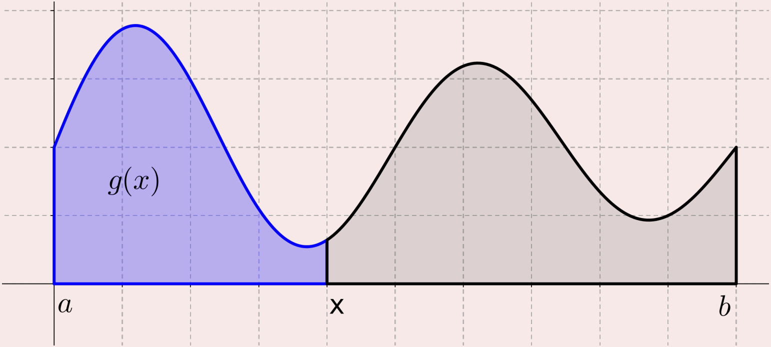
Em termos práticos, ele fornece um método muito poderoso para calcular integrais sem recorrer a definição como limite de um somatório.

O TFC também leva naturalmente a noção de integral indefinida. Iniciaremos apresentando como podemos definir uma função utilizando uma integral.

Função Definida por uma Integral

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, podemos definir

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b.$$



Exemplo 1

Use a definição de integral para encontrar uma expressão para a função

$$g(x) = \int_0^x t dt.$$

Exemplo 1

Use a definição de integral para encontrar uma expressão para a função

$$g(x) = \int_0^x t dt.$$

Resposta:

$$g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Observação:

Note que $g'(x) = f(x)$, ou seja, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva de $f(x) = x$.

Teorema 2 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b,$$

*é **contínua em** $[a,b]$, **derivável em** (a,b) e satisfaz*

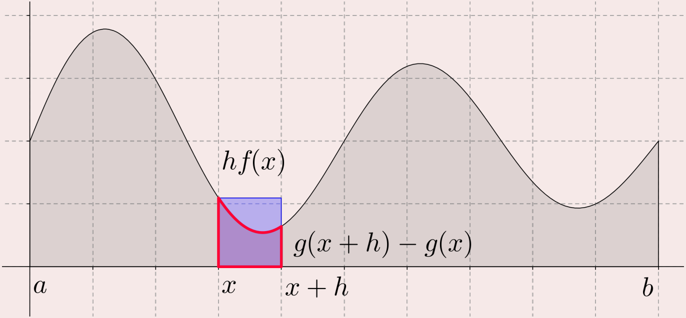
$$g'(x) = f(x),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

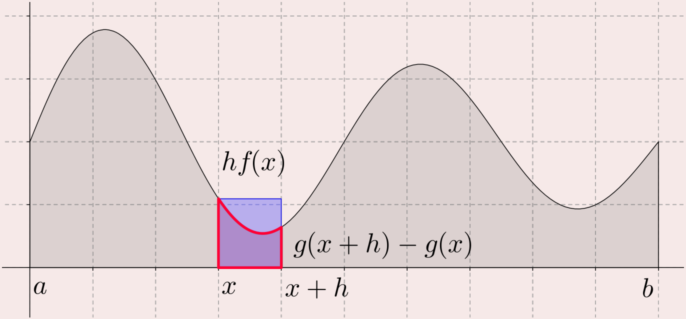
Veja os detalhes da demonstração desse teorema no livro texto!

Ideia da Demonstração:



A diferença $g(x+h) - g(x)$ fornece a área sob a curva $y = f(x)$ entre x e $x+h$, para $h > 0$.

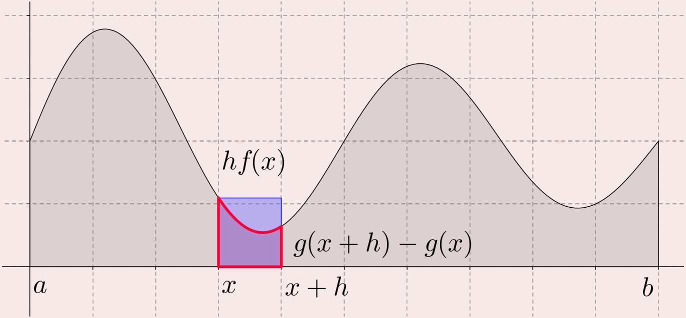
Ideia da Demonstração:



Para h pequeno, a área pode ser aproximada pela área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h, ou seja,

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x).$$

Ideia da Demonstração:



Dividindo ambos os termos por h e tomando o limite, obtemos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Exemplo 3

Encontre a derivada da função

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Exemplo 3

Encontre a derivada da função

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\,dt.$$

Resposta:

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Exemplo 4

Determine

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^4} \sec t \; dt\right].$$

Exemplo 4

Determine

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^4} \sec t \; dt\right].$$

Resposta:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^4} \sec t \; dt\right] = 4x^3 \sec(x^4).$$

Teorema 5 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

em que F é uma primitiva qualquer de f.

Exemplo 6

Calcule

$$I = \int_1^3 e^x dx.$$

Exemplo 6

Calcule

$$I = \int_1^3 e^x \, dx.$$

Resposta:

$$I = e^3 - e.$$

Exemplo 7

Determine a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 a 1.

Exemplo 7

Determine a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 a 1.

Resposta:

$$A = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 8

Calcule
$$I = \int_3^6 \frac{1}{x} dx.$$

Exemplo 8

Calcule

$$I = \int_3^6 \frac{1}{x} dx.$$

Resposta:

$$I = \ln 2.$$

Exemplo 9

Encontre a área sob a curva cosseno de 0 até b, com $0 \leq b \leq \pi/2$.

Exemplo 9

Encontre a área sob a curva cosseno de 0 até b, com $0 \leq b \leq \pi/2$.

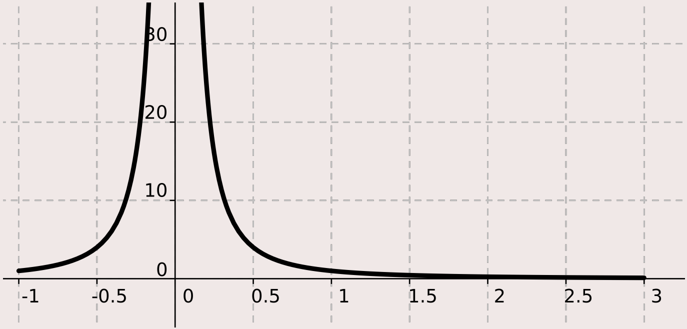
Resposta:

$$A = \operatorname{sen} b.$$

Exemplo 10

Está certo

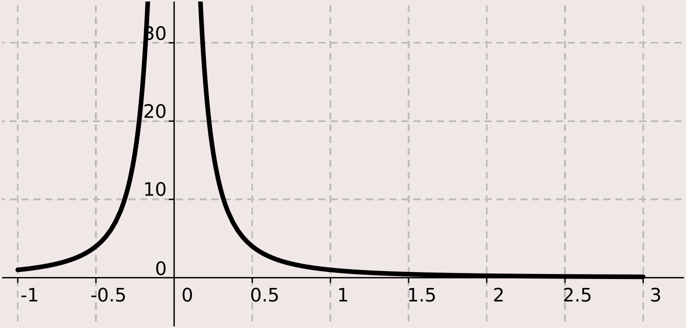
$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{3} = -\frac{4}{3} \ ?$$



Exemplo 10

Está certo

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{3} = -\frac{4}{3} \ ?$$



Resposta: Não! A integral não existe! O integrando não é uma função contínua.

Integral Indefinida

O teorema fundamental do cálculo estabelece uma relação entre a integral e a primitiva de uma função f.

Com base nessa observação, introduzimos a seguinte definição:

Definição 11 (Integral Indefinida)

A notação

$$F(x) = \int f(x)dx \quad \text{é equivalente à} \quad F'(x) = f(x).$$

Exemplo 12

- $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + c.$
- $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + c.$

Observação:

- A **integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ é um **número**!
- A **integral indefinida** $\int f(x)dx$ é uma **classe de funções** que diferem por uma constante!

Tabela de Integrais - Parte 1

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

2. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

3. $\int e^x\,dx = e^x$

4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x$

7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

8. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$

10. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$

Tabela de Integrais - Parte 2

11. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x|$

12. $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x|$

13. $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x|$

14. $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$

15. $\int \sinh x \, dx = \cosh x$

16. $\int \cosh x \, dx = \sinh x$

17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

***19.** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right|$

***20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

Exemplo 13

Encontre a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx.$$

Exemplo 13

Encontre a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx.$$

Resposta:

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx = 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + c.$$

Exemplo 14

Calcule
$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta.$$
Lembre-se que $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ e $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Exemplo 14

Calcule
$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} d\theta.$$

Lembre-se que $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ e $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Resposta:
$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} d\theta = -cossec\theta + c.$$

Exemplo 15

Determine

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$$

Exemplo 15

Determine

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$$

Resposta:

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx = -4 + 3\,\mathrm{tg}^{-1}\,2.$$

Exemplo 16

Calcule

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} dt$$

Exemplo 16

Calcule
$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt$$

Resposta:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt = 18 + 18 + \frac{1}{9} - 2 - \frac{2}{3} - 1 = 32\frac{4}{9}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Resumidamente, o TFC diz que a integral e a derivada são operações inversas.

Desse modo, podemos definir a integral indefinida $\int f(x)dx$ como sendo uma primitiva de f.

Sobretudo, podemos calcular a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ calculando a diferença de uma primitiva F de f nos extremos de integração.

Muito grato pela atenção!