# MA111 - Cálculo I

## Aula 18 - A Integral Definida

Marcos Eduardo Valle

UNICAMP

# Introdução

Na aula anterior, mostramos como podemos calcular a área abaixo do gráfico de uma função contínua e não-negativa.

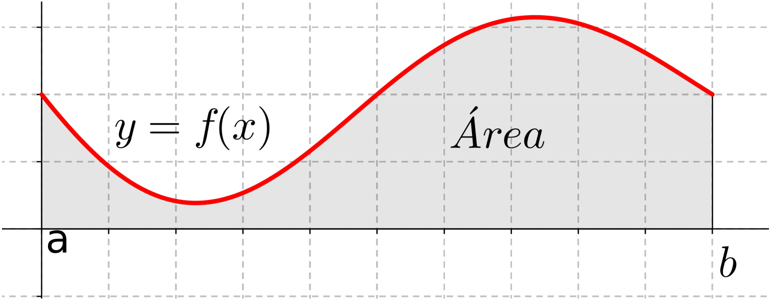
Na aula de hoje, apresentaremos o conceito de integral definida que está fortemente relacionado ao problema da área.

Especificamente, a integral definida fornece a área sob o gráfico da função contínua e não-negativa.

# Área sob o gráfico de uma função

A área $A$ da região $S$ que está sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa $f$ no intervalo $[a, b]$ é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

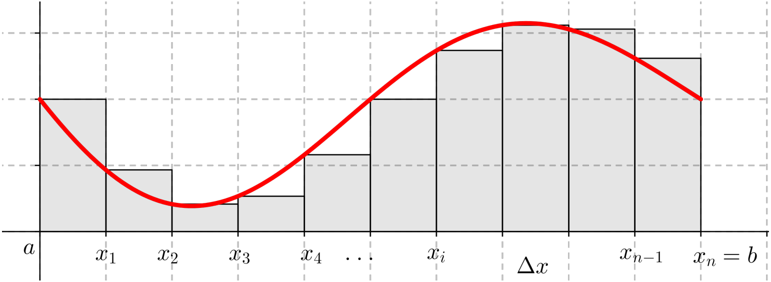
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$



# Área sob o gráfico de uma função

A área $A$ da região $S$ que está sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa $f$ no intervalo $[a, b]$ é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$



# A Integral Definida

## Definição 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. A integral de $f$ de $a$ e $b$ é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \qquad (1)$$

em que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$

## Observação:

Sendo $f$ uma função contínua, o limite em (1) sempre existe. No caso geral, a definição de integral está condicionada a existência do limite.

# Algumas Fórmulas Úteis

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$,
4. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$,
5. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$.

## Exemplo 2

Calcule a integral definida

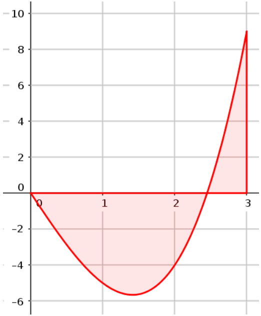
$$I = \int_0^3 (x^3 - 6x)dx.$$

## Exemplo 2

Calcule a integral definida

$$I = \int_0^3 (x^3 - 6x)dx.$$

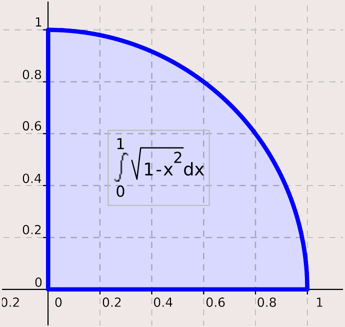
**Resposta:** O valor da integral é $I = -\frac{27}{4}$, conforme mostra a figura.



## Exemplo 3

Calcule a integral interpretando-a em termos de áreas:

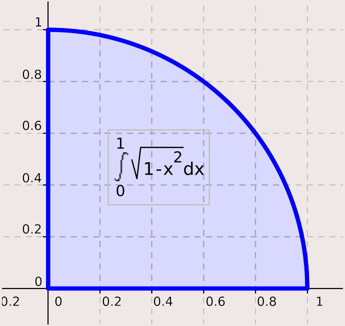
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$



## Exemplo 3

Calcule a integral interpretando-a em termos de áreas:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$




**Resposta:** $\pi/4$.

## Teorema 4

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Com efeito, as seguintes identidades decorrem da definição de integral definida e das propriedades do somatório e limite:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) \pm g(x_i)]\, \Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \\
&= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

## Teorema 5

*Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad e \quad \int_a^b cdx = c(b-a).$$

Com efeito, da definição de integral definida temos:

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n cf(x_i)\Delta x = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = c\int_a^b f(x)dx.$$

Similarmente,

$$\int_a^b cdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c\Delta x = \lim_{n\to\infty} c\Delta x\left(\sum_{i=1}^n 1\right) = \lim_{n\to\infty} c\left(\frac{b-a}{n}\right)n = c(b-a).$$

## Exemplo 6

Sendo $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$, calcule

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) dx.$$

## Exemplo 6

Sendo $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$, calcule

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) dx.$$

**Resposta:** 5.

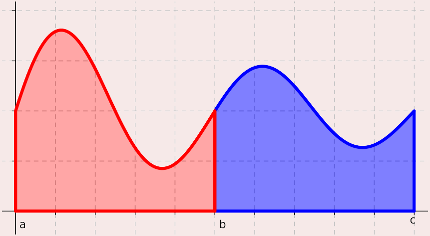
## Teorema 7

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad e \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

## Teorema 8

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

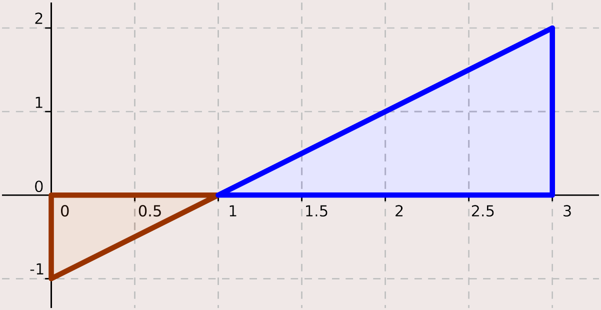
*Interpretação geométrica para uma função f não-negativa:*



## Exemplo 9

Calcule a integral interpretando-a em termos de áreas:

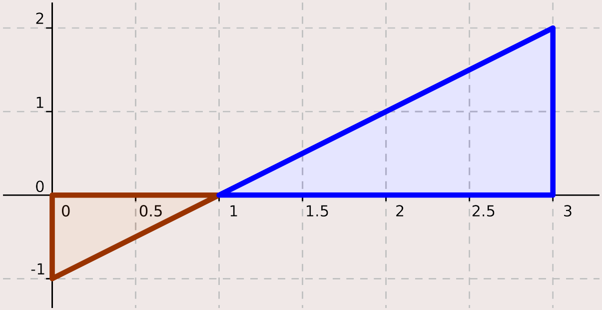
$$\int_0^3 (x-1)dx.$$



## Exemplo 9

Calcule a integral interpretando-a em termos de áreas:

$$\int_0^3 (x-1)dx.$$




**Resposta:** $3/2$.

# Propriedades Comparativas:

1. Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

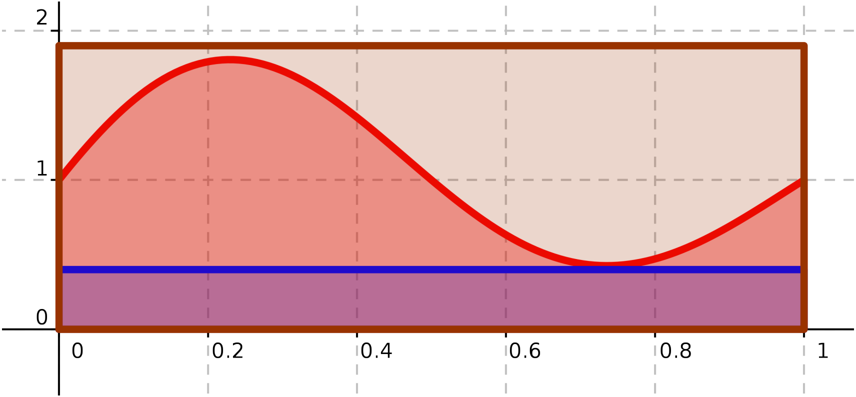
2. Se $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

## Propriedade Comparativa:

Se $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$



## Exemplo 10

Use a última propriedade para estimar o valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

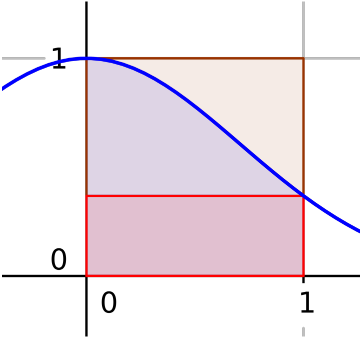
## Exemplo 10

Use a última propriedade para estimar o valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

**Resposta:**

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$



## Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos a integral definida de $f$ de $a$ até $b$, dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$

Apresentamos também diversas propriedades da integral definia.

O teorema fundamental do cálculo, que será apresentado na próxima aula, estabelece uma forma eficiente de calcular uma integral sem recorrer a definição acima.

Muito grato pela atenção!