MA111 - Cálculo I

Aula 17 - Primitivas. Área sob uma Curva.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula de hoje veremos dois conceitos aparentemente desconexos.

Primeiro, veremos a noção de primitiva de uma função, que pode ser vista como a inversa da derivada de uma função.

Posteriormente, discutiremos como podemos calcular a área sobre o gráfico de uma função não-negativa.

Primitiva

Definição 1 (Primitiva)

Uma função F é denominada uma primitiva de f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 2

Se $f(x) = x^2$, então

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad \text{e} \quad G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100,$$

são ambas primitivas de f.

Teorema 3 (Primitiva Geral)

Se F é uma primitiva de f em I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + c,$$

em que c é uma constante arbitrária.

Observação

A primitiva é na verdade uma família de funções que diferem por uma constante!

Exemplo 4

Encontre uma primitiva mais geral de:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

b) $f(x) = 1/x$.

c) $f(x) = x^n, n \neq -1$.

Exemplo 4

Encontre uma primitiva mais geral de:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Resposta: $F(x) = -\cos x + c$.

b) $f(x) = 1/x$.
Resposta: $F(x) = \ln|x| + c, \forall x \neq 0$.

c) $f(x) = x^n, n \neq -1$.
Resposta: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Exemplo 5

Encontre todas as funções g tais que

$$g'(x) = 4\,\mathrm{sen}\,x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}.$$

Exemplo 5

Encontre todas as funções g tais que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}.$$

Resposta: $g(x) = -4 \cos x + \frac{2}{5} x^5 - 2\sqrt{x} + c$.

Exemplo 6

Encontre f sabendo que

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1+x^2} \quad \text{e} \quad f(0) = -2.$$

Exemplo 6

Encontre f sabendo que

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1+x^2} \quad \text{e} \quad f(0) = -2.$$

Resposta: $f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}{-1} x - 3.$

Exemplo 7

Encontre f sabendo que $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$.

Exemplo 7

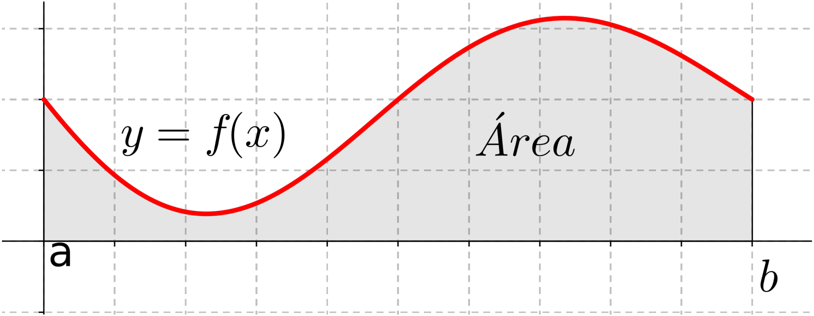
Encontre f sabendo que $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$.

Resposta: $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.

Áreas

Problema:

Determine a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$.

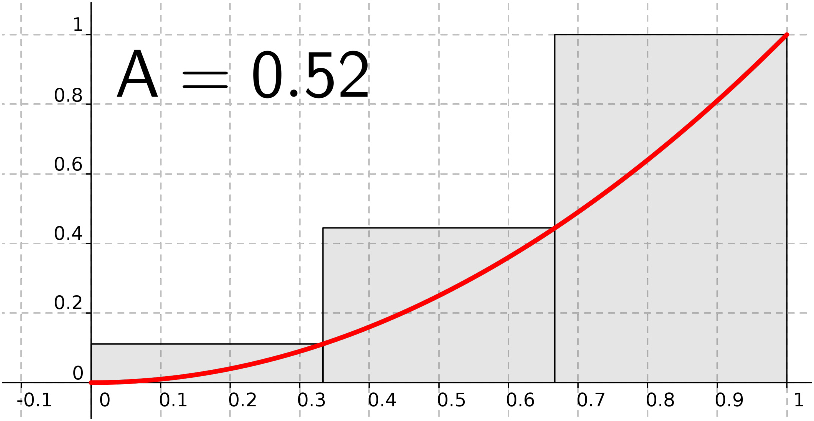


Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de

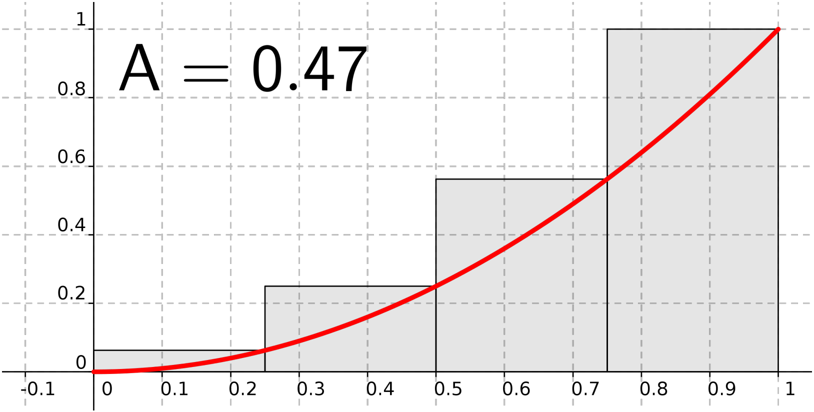
Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 3 retângulos:



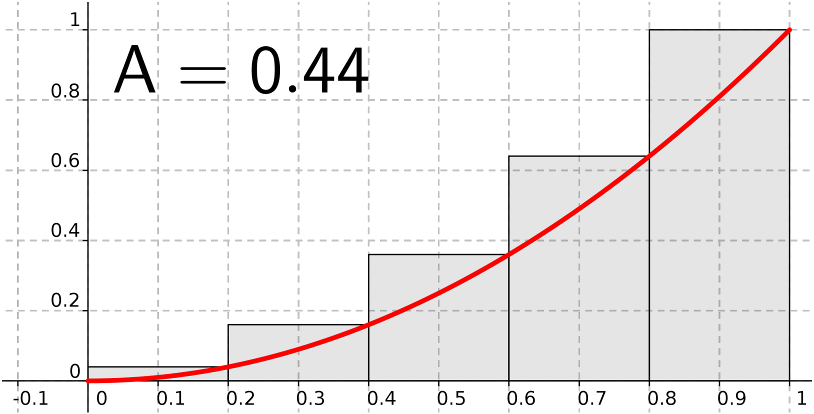
Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 4 retângulos:



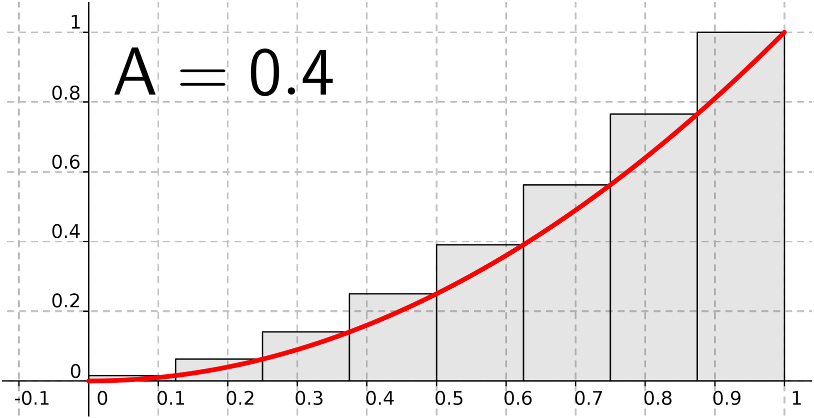
Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 5 retângulos:



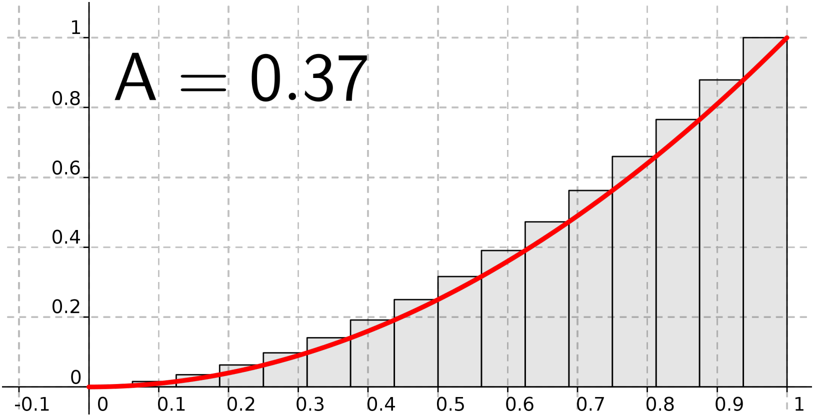
Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 8 retângulos:



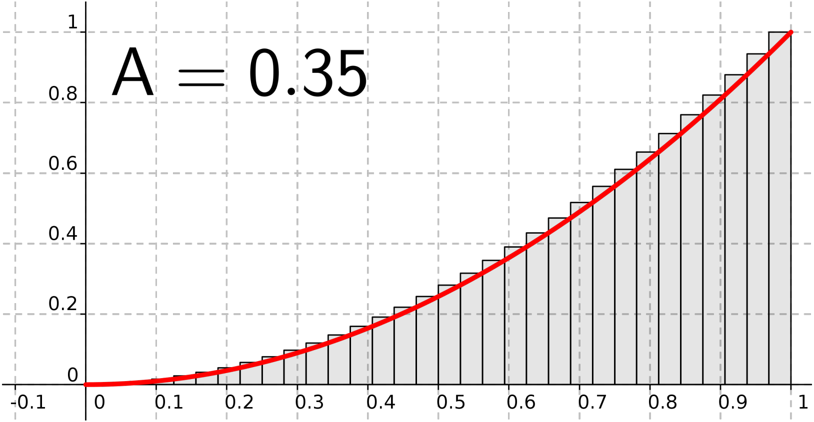
Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 16 retângulos:



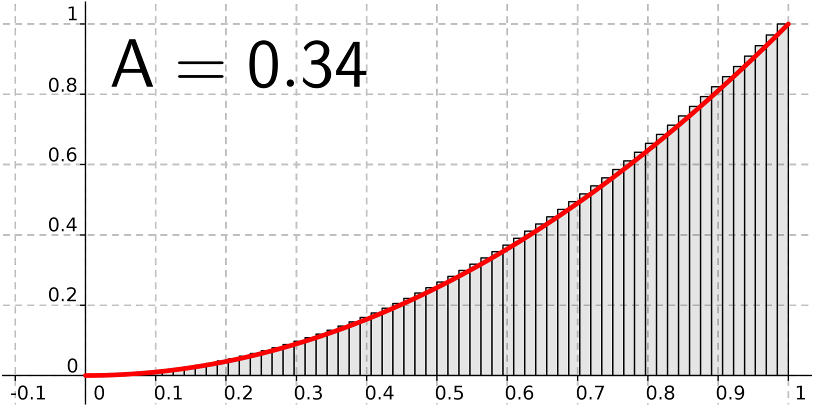
Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 32 retângulos:



Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de 64 retângulos:



Exemplo

Podemos estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 calculando a soma da área de n retângulos:

$$A \approx \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$\frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)$$

Sabendo que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

concluímos que a a área é aproximadamente

$$A \approx \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, concluímos que a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 é

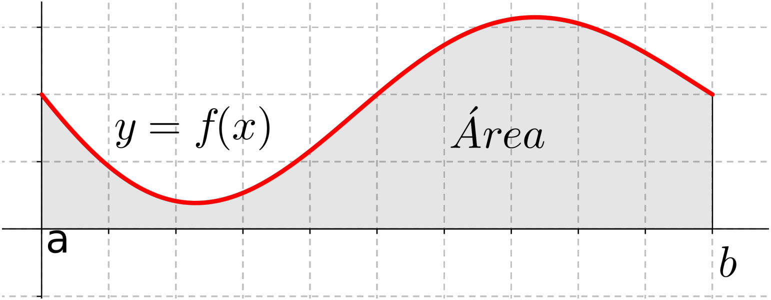
$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} = 0.333 \ldots .$$

A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa f no intervalo $[a, b]$ é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots f(x_n)\Delta x,$$

em que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$

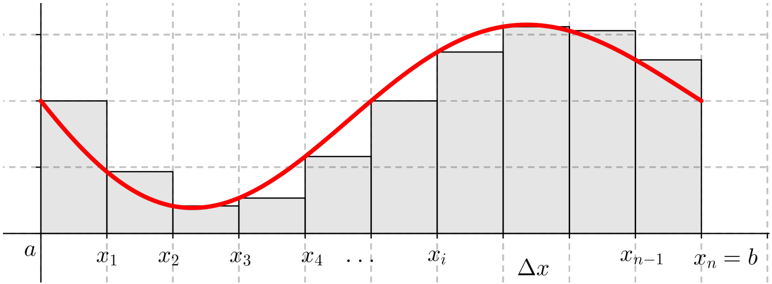


A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa f no intervalo $[a, b]$ é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots f(x_n)\Delta x,$$

em que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$



Notação de Somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x.$$

Definição 8

A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa f no intervalo $[a, b]$ é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de primitiva, que pode ser vista como a inversa da derivada de uma função.

Destacamos que a primitiva de uma função é uma família de funções que diferem por uma constate!

Na aula de hoje também apresentamos o problema de calcular área sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa.

Destacamos que a área é obtida por um limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes quando o número de retângulos tente para infinito.

Muito grato pela atenção!