MA111 - Cálculo I

Aula 15 - O que as Derivadas nos Dizem Sobre a Função. Esboço de Gráficos.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

O que f' nos diz sobre f

Seja I um intervalo e $a, b \in I$ com $a < b$.
Pelo teorema do valor médio, existe ξ entre a e b tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

- Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então

  $$f(b) - f(a) > 0 \quad \Rightarrow f(a) < f(b).$$

  Logo, a função f é crescente.
- Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então

  $$f(b) - f(a) < 0 \quad \Rightarrow f(a) > f(b).$$

  Logo, a função f é decrescente.

Teste Crescente/Decrescente ou Teste C/D

- Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.
- Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Exemplo 1

Encontre onde

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5,$$

é crescente e onde ela é decrescente. Encontre também os máximos e mínimos locais de f.

Exemplo 1

Encontre onde

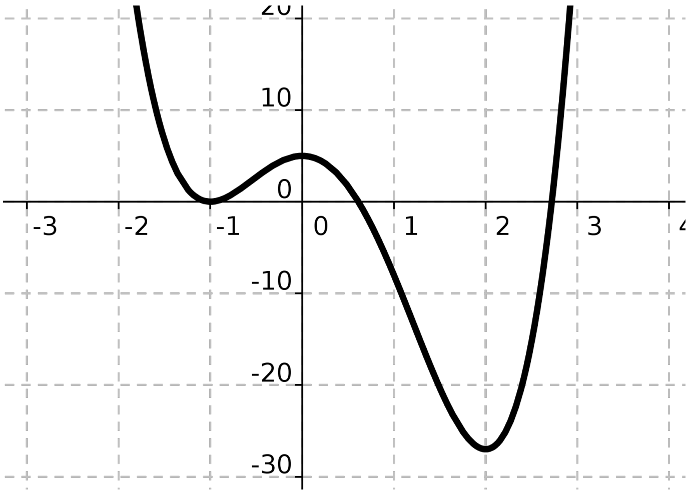
$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5,$$

é crescente e onde ela é decrescente. Encontre também os máximos e mínimos locais de f.

Resposta: Note que $f'(x) = 12x(x-2)(x+1)$ e, portanto,

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente
$(-1, 0)$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente
$(0, 2)$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente
$(2, \infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente

Gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.



Teste da Primeira Derivada

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função f contínua e derivável num intervalo que contém I.

- Se o sinal de f' mudar de **positivo para negativo** em c, então f tem um **máximo local** em c.
- Se o sinal de f' mudar de **negativo para positivo** em c, então f tem um **mínimo local** em c.
- Se f' **não mudar de sinal** em c, então f não tem **máximo nem mínimo** locais em c.

Exemplo 2

Encontre os máximos e mínimos locais de

$$g(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Exemplo 2

Encontre os máximos e mínimos locais de

$$g(x) = x + 2\,\text{sen}\,x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

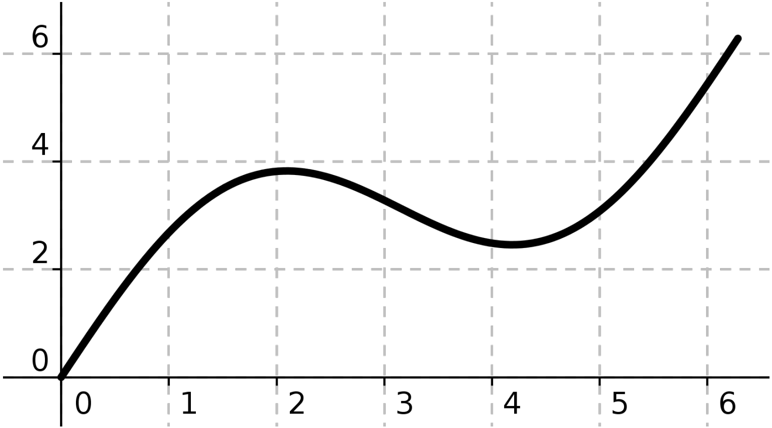
Resposta: Note que $g'(x) = 1 + 2\cos x$ e, portanto, $g'(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ quando $x_1 = 2\pi/3$ ou $x_2 = 4\pi/3$. Pelo teste C/D,

Intervalo	g'	g
$(0, 2\pi/3)$	$+$	crescente
$(2\pi/3, 4\pi/3)$	$-$	decrescente
$(4\pi/3, 2\pi)$	$+$	crescente

Pelo teste da primeira derivada, temos que g admite:

- Máximo local em $x_1 = 2\pi/3$ com $g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3,83$.
- Mínimo local em $x_2 = 4\pi/3$ com $g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2,46$.

Gráfico da função $g(x) = x + 2\,\text{sen}\,x$ do exemplo anterior.



Concavidade

Definição 3 (Concavidade)

- Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas retas tangentes no intervalo I, então ele é dito **côncavo para cima.**
- Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas retas tangentes no intervalo I, então ele é dito **côncavo para baixo.**

Teste da Concavidade

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é **côncavo para cima** em I.
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é **côncavo para baixo** em I.

Definição 4 (Ponto de Inflexão)

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto P e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa, em P.

Teste da Segunda Derivada

Suponha que f'' seja contínua em um intervalo I que contém c.

- Se $f'(c) = 0$ **e** $f''(c) > 0$, então f tem **mínimo local** em c.
- Se $f'(c) = 0$ **e** $f''(c) < 0$, então f tem **máximo local** em c.

Exemplo 5

Examine a curva

$$y = x^4 - 4x^3$$

em relação a concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

Exemplo 5

Examine a curva

$$y = x^4 - 4x^3$$

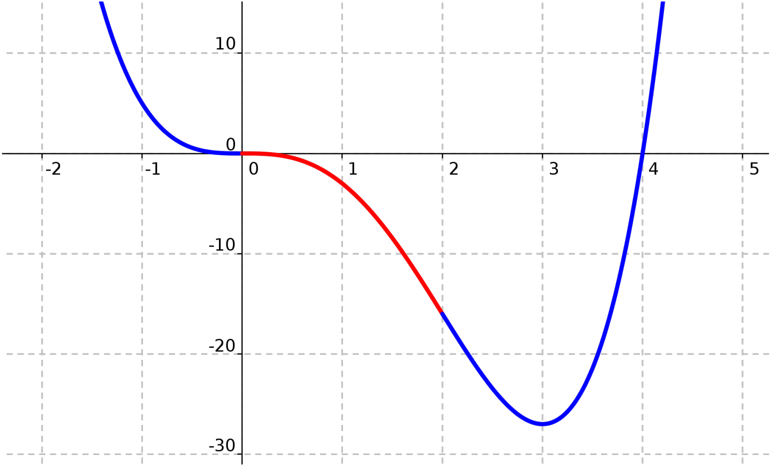
em relação a concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

Resposta: Note que $f'(x) = 4x^2(x-3)$ e $f''(x) = 12x(x-2)$. Os pontos críticos de f são $x_0 = 0$ e $x_1 = 3$. Como $f''(3) > 0$, pelo teste da segunda derivada concluímos que f possui um mínimo local em $x_1 = 3$. Como $f'(x) < 0$ para todo $x < 3$, f não tem máximo nem mínimo local em $x_0 = 0$. Analisando f'' temos

Intervalo	f''	concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

Os pontos de inflexão de f são $(0, 0)$ e $(2, -16)$.

Gráfico da curva $y = x^4 - 4x^3$.



Exemplo 6

Esboce o gráfico da curva

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3},$$

sabendo que

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Exemplo 6

Esboce o gráfico da curva

$$f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3},$$

sabendo que

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}.$$

Resposta: Os pontos críticos de f são $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$.

Analisando f', construímos a tabela:

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	f'	f
$(-\infty, 0)$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente
$(0, 4)$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente
$(4, 6)$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente
$(6, \infty)$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente

Com base nessa tabela e no teste da primeira derivada, temos que f admite:

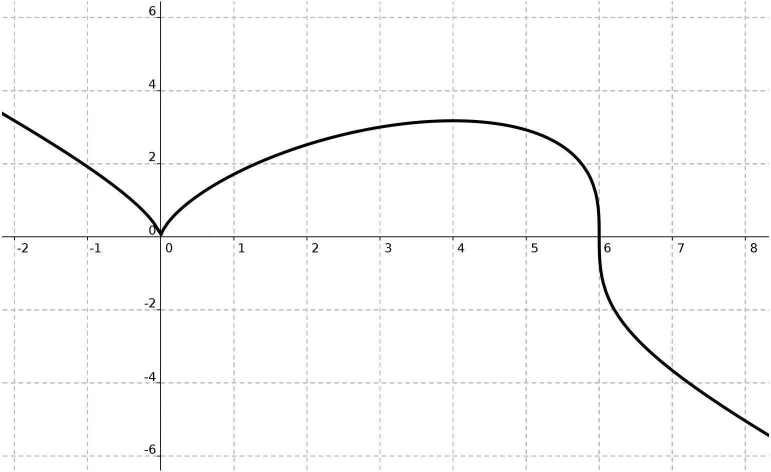
- Mínimo local em $x_0 = 0$ com $f(0) = 0$.
- Máximo local em $x_1 = 4$ com $f(4) = 2^{5/3}$.

Analisando f'', temos que f é:

- Côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$.
- Côncava para cima no intervalo $(6, \infty)$.

O único ponto de inflexão é $(6, 0)$.

Gráfico da curva $y = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.



Exemplo 7

Use as primeira e segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

Exemplo 7

Use as primeira e segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

Resposta: A função f não está definida em $x_0 = 0$. Calculando os limites laterais, encontramos

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty.$$

Logo, $x = 0$ é uma assíntota vertical de $y = f(x)$. Além disso, temos

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} e^{1/x} = 1.$$

Portanto, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Note que $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Logo, f é sempre decrescente e não admite ponto crítico, nem máximo e mínimo local.
A segunda derivada de f é

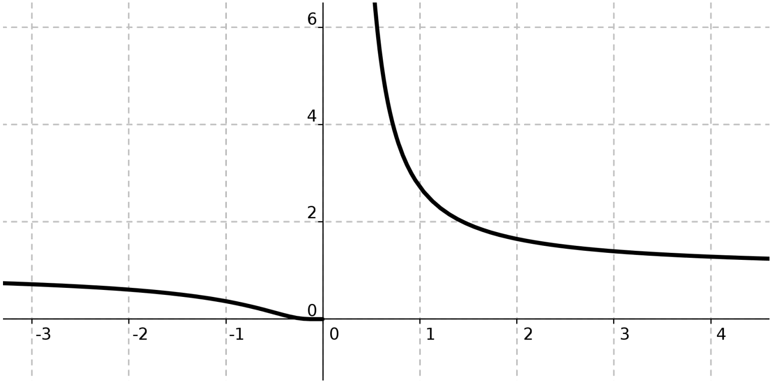
$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}.$$

Analisando f'', temos que f é:

- Côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -1/2)$.
- Côncava para cima nos intervalos $(-1/2, 0)$ e $(0, \infty)$.

O único ponto de inflexão da curva $y = e^{1/x}$ é $(-1/2, e^{-2})$.

Gráfico da curva $y = e^{1/x}$.



Roteiro para esboçar uma curva:

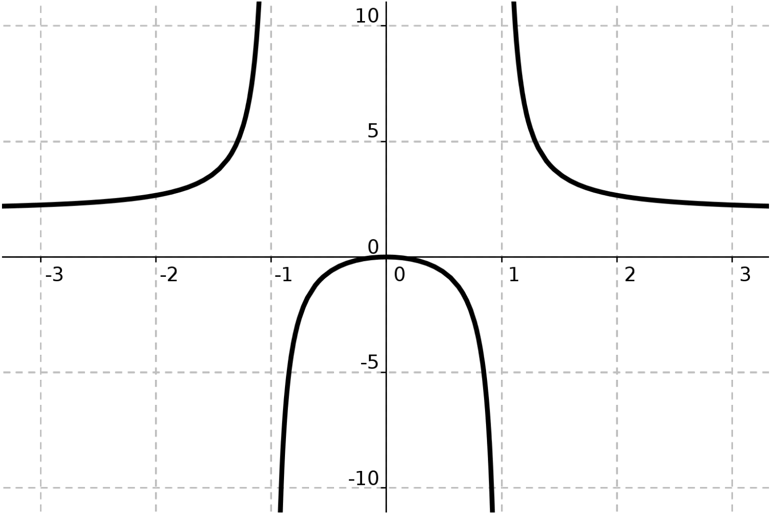
1. Domínio.
2. Intersecção com os eixos.
3. Simetria.
   - Função par: $f(-x) = f(x)$.
   - Função ímpar: $f(-x) = -f(x)$.
   - Função periódica: $f(x + p) = f(x)$.
4. Assíntotas.
5. Intervalo de crescimento e decrescimento.
6. Máximos e mínimos locais.
7. Concavidade e pontos de inflexão.

Exemplo 8

Esboce a curva

$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

O gráfico da curva $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$ é

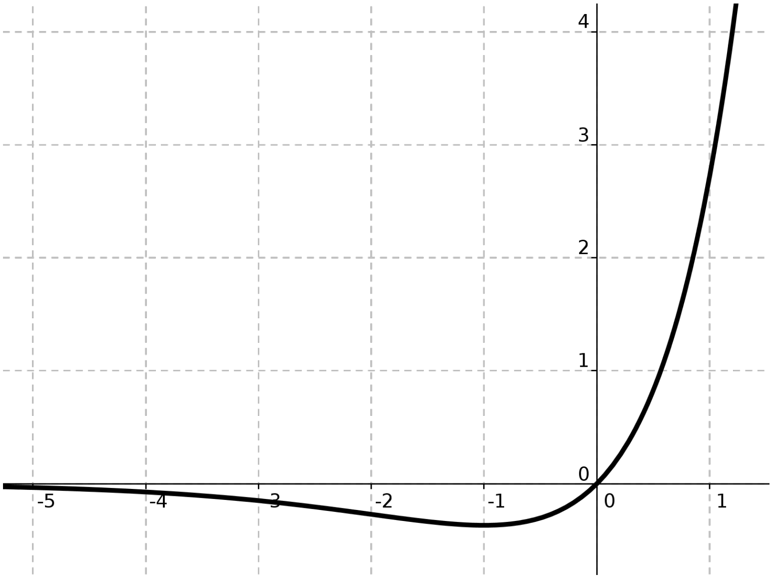


Exemplo 9

Esboce a curva

$$y = xe^x.$$

O gráfico da curva $y = xe^x$ é



Considerações Finais

Na aula de hoje vimos que a primeira e a segunda derivadas fornecem informações importantes sobre uma função.

A primeira derivada, além das informações sobre os pontos criticos, máximos e mínimos locais, f' nos fornece informações sobre o crescimento e decrescimento da função.

A segunda derivada nos fornece informações sobre a concavidade e pontos de inflexão da função.

Tanto f' como f'', combinadas com informações sobre o domínio e assíntotas, são usadas para esboçar o gráfico de f.

Muito grato pela atenção!