MA111 - Cálculo I

Aula 14 - Formas Indeterminadas e a Regra de L'Hôspital.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Formas Indeterminadas

Definição 1 (Forma Indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$)

Um limite da forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

pode ou não existir.

Exemplo 2

Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Exemplo 3

Sabemos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Como calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = ??$$

Ideia para calcular um limite indeterminado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\,\frac{(x-a)}{(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

Exemplo 4

Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Resposta:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

Regra de L'Hôspital

Teorema 5 (Regra de L'Hôspital)

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*. Se* f *e* g *são deriváveis em* a *e* $g'(x) \neq 0$ *em um intervalo aberto* I *que contém* a*, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

se o limite da direita existir (or for $+\infty$ *ou* $-\infty$*).*

Exemplo 6

Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}.$$

Exemplo 6

Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = 2.$$

Exemplo 7

Dado $c \in \mathbb{R}$, calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2}.$$

Exemplo 7

Dado $c \in \mathbb{R}$, calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2}.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} = \frac{c(c-1)}{2}.$$

Observação:

A regra de L'Hôspital também vale para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 8

Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}}.$$

Observação:

A regra de L'Hôspital também vale para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 8

Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}}.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Forma Indeterminada do Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Corolário 9 (Regra de L'Hôspital para Limites Infinitos)

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. *Se f e g são deriváveis em a e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

se o limite da direita existir (or for $+\infty$ ou $-\infty$).

Exemplo 10

Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Exemplo 10

Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Exemplo 11

Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

Exemplo 11

Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Produto Indeterminado

Exemplo 12

Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

Produto Indeterminado

Exemplo 12

Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

Diferença Indeterminada

Exemplo 13

Calcule

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$$

Lembre-se que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Diferença Indeterminada

Exemplo 13

Calcule

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$$

Lembre-se que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Resposta:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = 0.$$

Potência Indeterminada

Quando encontramos um limite indeterminado do tipo 0^0, ∞^0 ou 1^∞, usando a continuidade da função exponencial, podemos calcular:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \ln f(x)} = \exp \left\{ \lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) \right\}.$$

Exemplo 14

Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}.$$

Lembre-se que $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Potência Indeterminada

Quando encontramos um limite indeterminado do tipo 0^0, ∞^0 ou 1^∞, usando a continuidade da função exponencial, podemos calcular:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = \exp\left\{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)\right\}.$$

Exemplo 14

Calcule

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}.$$

Lembre-se que $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Resposta:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = e^4.$$

Exemplo 15

Encontre

$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Exemplo 15

Encontre

$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Exemplo que requer cuidado:

Exemplo 16

Calcule

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

Exemplo que requer cuidado:

Exemplo 16

Calcule

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

Resposta: Como a função é contínua em π, sem usar a regra de L'Hôspital, concluímos que

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 0.$$

Exemplo que requer cuidado:

Exemplo 17

Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Lembre-se que $\frac{d}{dx}\left[\operatorname{tg} x\right] = \sec^2 x$.

Exemplo que requer cuidado:

Exemplo 17

Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Lembre-se que $\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x$.

Resposta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x} = -2.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos a regra de L'Hôspital, que pode ser usada para calcular limites indeterminados.

Com efeito, a regra de L'Hôspital pode ser usada para calcular limites do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Ela também pode ser usada para calcular limites indeterminados do tipo $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$ com algumas manipulações algébricas.

Por fim, a regra de L'Hôspital, combinada com a continuidade da função exponencial, pode ser usada para calcular limites indeterminados do tipo 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Muito grato pela atenção!