MA111 - Cálculo I

Aula 13 - Valores Máximos e Mínimos. Teorema do Valor Médio

Marcos Eduardo Valle

Introdução

O cálculo diferencial possui um papel importante em problemas de otimização.

Simplificadamente, num problema de otimização buscamos a melhor maneira de fazer alguma coisa.

Exemplos de problema de otimização incluem:

- Como produzir uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial?
- Qual o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?

Problemas de otimização podem ser reduzidos a encontrar valores máximo ou mínimo de uma função.

Valores Extremos – Máximo e Mínimo Global

Dizemos que $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem

- **máximo global** em c se

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in D.$$

  O valor $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D.

- **mínimo global** em c se

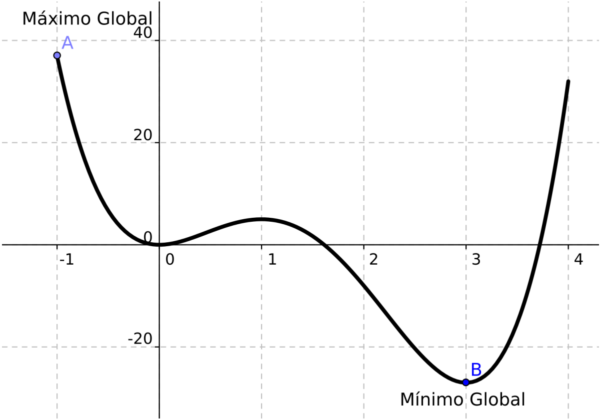
$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in D.$$

  O valor $f(c)$ é chamado **valor mínimo** de f em D.

Os valores máximo e mínimo de f são chamados **valores extremos** de f.

Exemplo

Considere $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, definida em $D = [-1, 4]$.



Máximo e Mínimo Local

Dizemos que $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem

- **máximo local** em c se

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I,$$

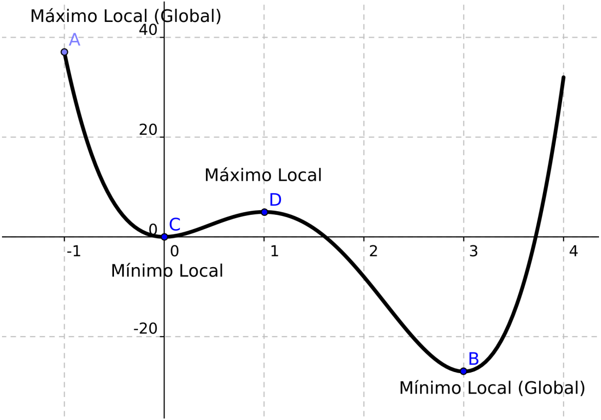
- **mínimo local** em c se

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I,$$

em que I é um intervalo aberto que contém c.

Exemplo

Considere $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, definida em $D = [-1, 4]$.



O ponto $x = 4$ não é nem máximo local nem global.

Teorema do Valor Extremo. Teorema de Fermat

Teorema 1 (Teorema do Valor Extremo)

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo global $f(c)$ e um valor mínimo global $f(d)$ em pontos $c, d \in [a, b]$.

Teorema 2 (Teorema de Fermat)

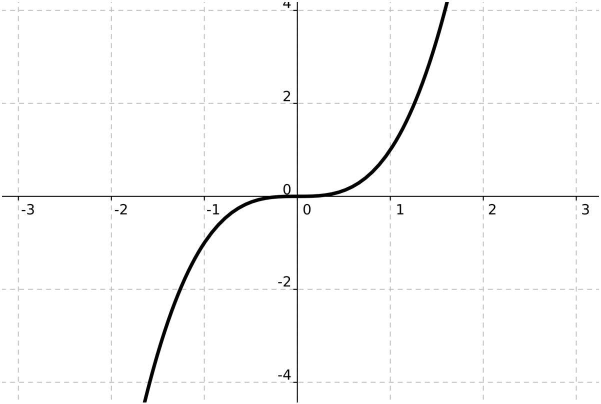
Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Exemplo 3

Sabemos que $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ tem um mínimo local em $x = 0$. Verifique que $f'(0) = 0$.

Exemplo

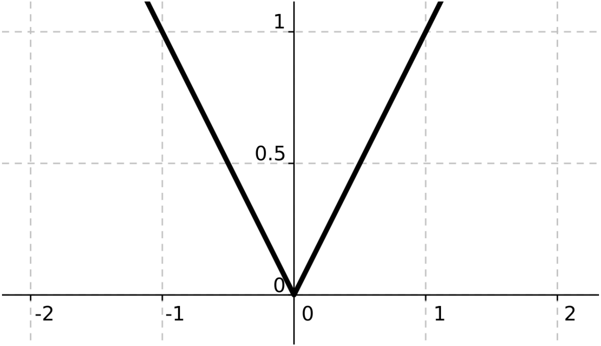
A função $f(x) = x^3$ é tal que $f'(0) = 0$. Porém, $c = 0$ não é nem um máximo local nem um mínimo local de f.



Logo, $f'(c) = 0$ não implica que c é um máximo ou mínimo local.

Exemplo

A função $f(x) = |x|$ tem um mínimo local (global) em $c = 0$, porém $f'(0)$ não existe.



Pontos Críticos

Definição 4 (Ponto Crítico)

Um **ponto crítico** de f é um ponto do domínio de f em que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Ponto críticos são candidatos para mínimo ou máximo local de f.

Exemplo

Determine os pontos críticos de

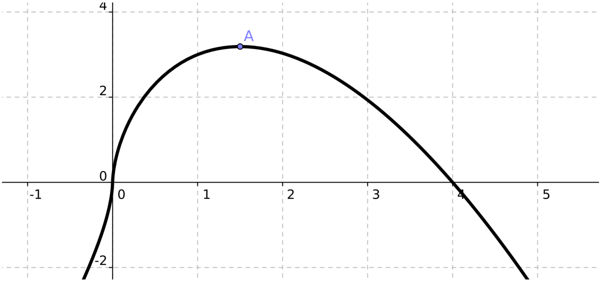
$$f(x) = x^{3/5}(4 - x).$$

Exemplo

Determine os pontos críticos de

$$f(x) = x^{3/5}(4 - x).$$

Resposta: Os pontos críticos de f são $3/2$ e 0.



Método para Determinar Valores Extremos

Método do Intervalo Fechado

Para determinar os valores extremos (máximo e mínimo globais) de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, faça:

1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nos extremos a e b do domínio.

- O valor máximo de f é o maior entre as etapas 1 e 2.
- O valor mínimo de f é o menor entre as etapas 1 e 2.

Exemplo

Encontre os extremos da função

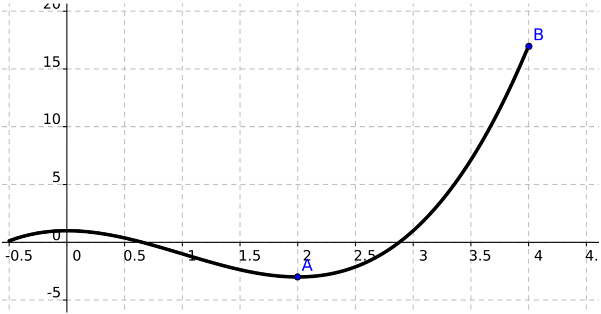
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4.$$

Exemplo

Encontre os extremos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4.$$

Resposta: Valor máximo: $f(4) = 17$, Valor mínimo: $f(2) = -3$.



Teorema do Valor Médio

Teorema 5 (Teorema do Valor Médio (TVM))

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \iff \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema 6 (Teorema de Rolle)

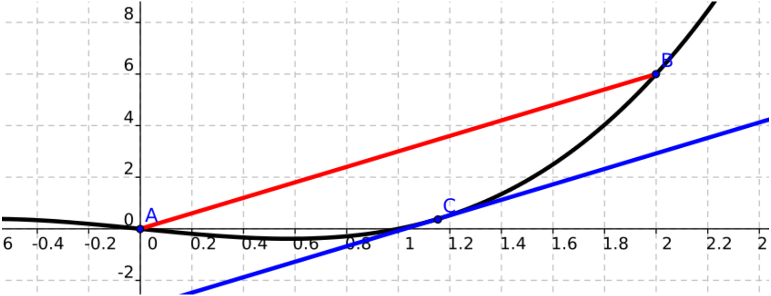
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Exemplo

Considere $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$ e $b = 2$.
Note que f é um polinômio, logo é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Pelo TVM, existe $c \in (0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0).$$



Com efeito, $c = 2/\sqrt{3}$.

Teorema 7

Se $f'(x) = 0$ *para todo* x *em um intervalo* (a, b)*, então* f *é constante em* (a, b)*.*

Corolário 8

Se $f'(x) = g'(x)$ *para todo* x *em um intervalo* (a, b)*, então* $f - g$ *é constante em* (a, b)*, ou seja,* $f(x) = g(x) + C$*, em que* C *é uma constante.*

Exemplo 9

Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

Exemplo 9

Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

Resposta: O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

Exemplo 10

Demonstre a identidade

$$\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

Lembre-se que

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{tg}^{-1} x\right] = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cotg}^{-1} x\right] = -\frac{1}{1+x^2},$$

e

$$\operatorname{tg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Resolução: Considere a função

$$f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x.$$

Derivando f encontramos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Pelo Teorema 7, concluímos que

$$f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x = C,$$

em que C é uma constante. Determinamos o valor da constante tomando, por exemplo, $x = 1$. Com efeito,

$$C = \operatorname{tg}^{-1} 1 + \operatorname{cotg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Com isso, demonstramos a identidade.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de máximo e mínimo de uma função.

Vimos também o conceito de ponto crítico, que são candidatos a mínimo e máximo local.

Na aula de hoje apresentamos também o teorema do valor médio e algumas de suas consequências.

Muito grato pela atenção!