MA111 - Cálculo I

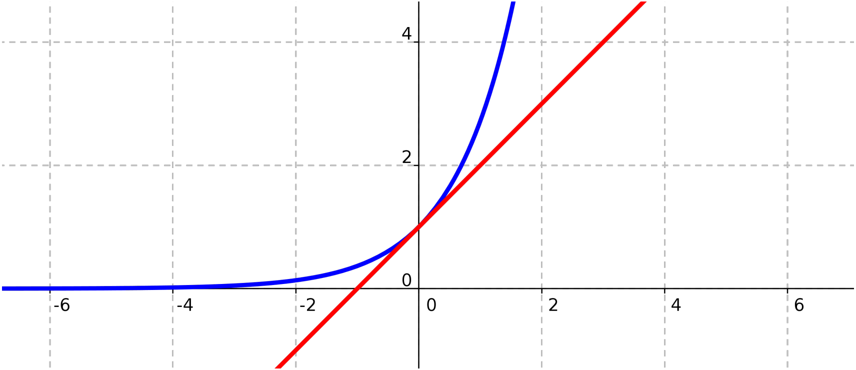
Aula 12 - Aproximações Lineares, Polinômios de Taylor, Diferenciais e Taxas Relacionadas.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Aproximação Linear

Considere a função $f(x) = e^x$, com x próximo de $a = 0$.

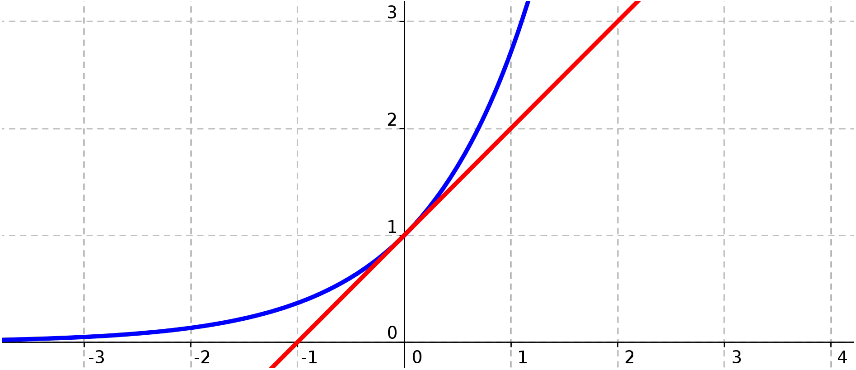


A reta tangente ao gráfico no ponto $(0, 1)$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + x.$$

Aproximação Linear

Considere a função $f(x) = e^x$, com x próximo de $a = 0$.

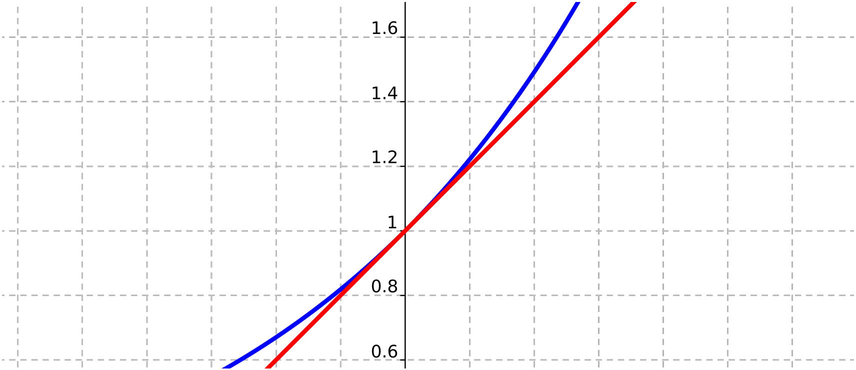


A reta tangente ao gráfico no ponto $(0, 1)$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + x.$$

Aproximação Linear

Considere a função $f(x) = e^x$, com x próximo de $a = 0$.

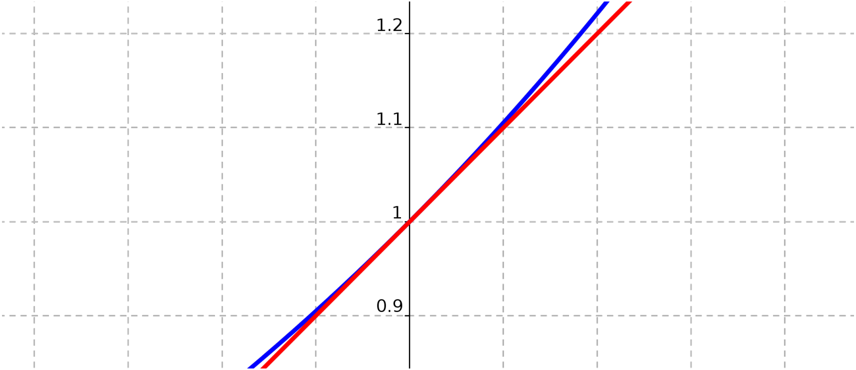


A reta tangente ao gráfico no ponto $(0, 1)$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + x.$$

Aproximação Linear

Considere a função $f(x) = e^x$, com x próximo de $a = 0$.

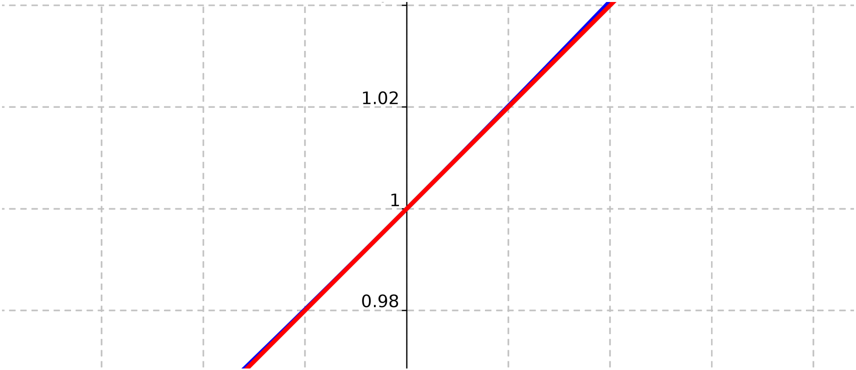


A reta tangente ao gráfico no ponto $(0, 1)$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + x.$$

Aproximação Linear

Considere a função $f(x) = e^x$, com x próximo de $a = 0$.

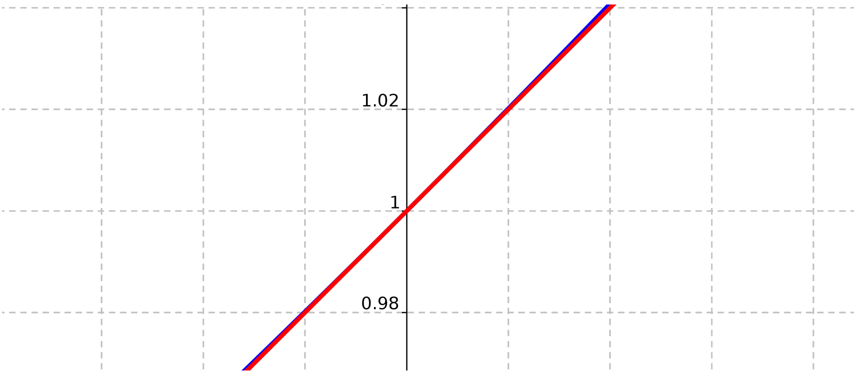


A reta tangente ao gráfico no ponto $(0, 1)$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + x.$$

Aproximação Linear

Considere a função $f(x) = e^x$, com x próximo de $a = 0$.



Para valores de x próximos de a, a função pode ser aproximada pela reta tangente.

Aproximação Linear

A reta tangente a curva $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Definição 1 (Aproximação Linear ou Linearização)

Para valores de x suficientemente próximos de a, uma função f derivável pode ser aproximada por

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Polinômios de Taylor

Definição 2 (Polinômios de Taylor)

Podemos aproximar uma função f suficientemente derivável pelo polinômio

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

para x suficientemente próximos de a.

Exemplo 3

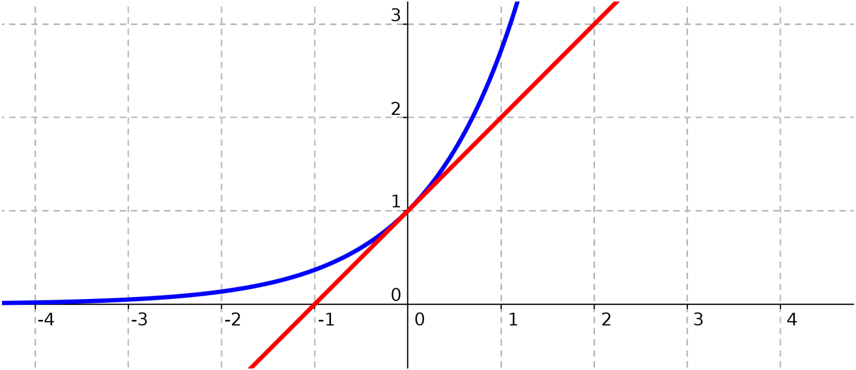
Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Exemplo 3

Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Polinômio de grau $n = 1$:

$$T_1(x) = 1 + x.$$

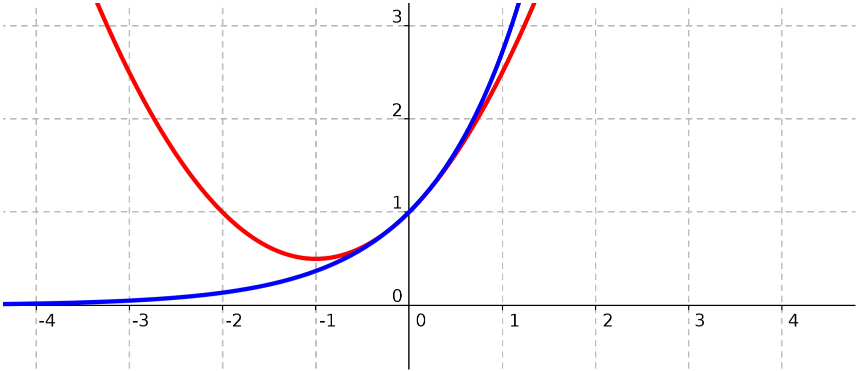


Exemplo 3

Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Polinômio de grau $n = 2$:

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

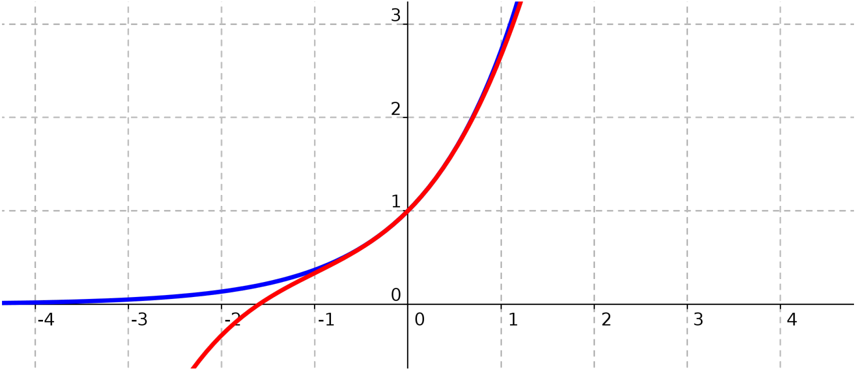


Exemplo 3

Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Polinômio de grau $n = 3$:

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

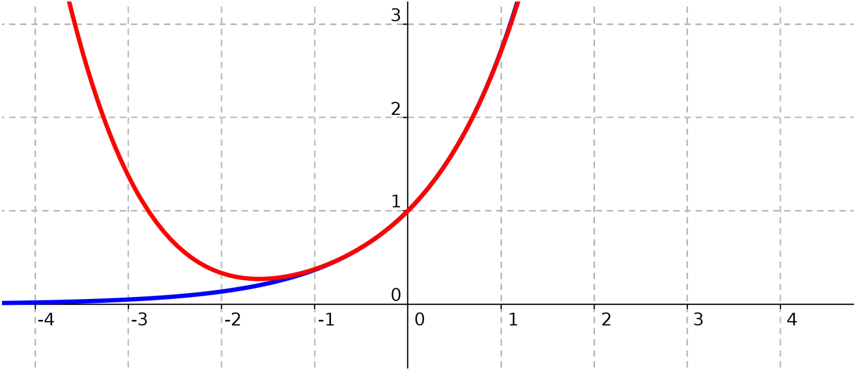


Exemplo 3

Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Polinômio de grau $n = 4$:

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

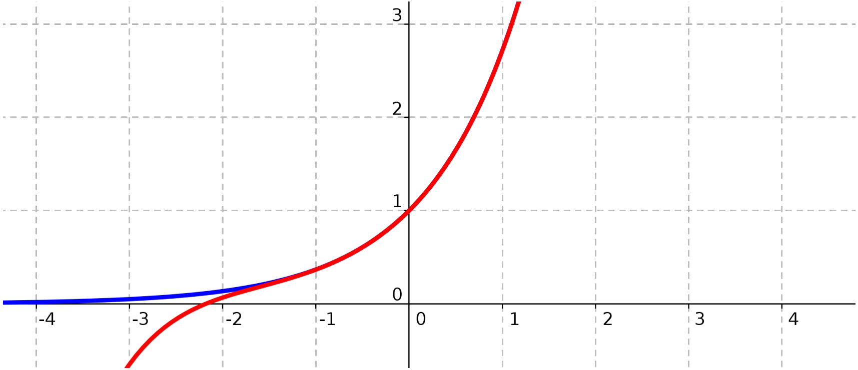


Exemplo 3

Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Polinômio de grau $n = 5$:

$$T_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5.$$



Exemplo 3

Determine o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$.

Polinômio de grau n:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Exemplo 4

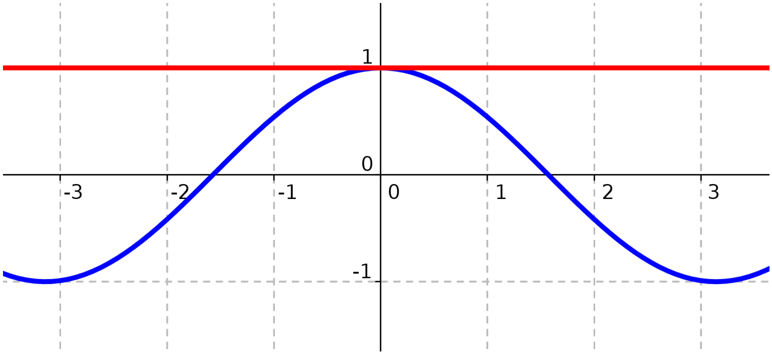
Determine o polinômio de Taylor de grau $2n$ da função $f(x) = \cos(x)$.

Exemplo 4

Determine o polinômio de Taylor de grau $2n$ da função $f(x) = \cos(x)$.

Polinômio de grau $n = 0$:

$$T_0(x) = 1.$$

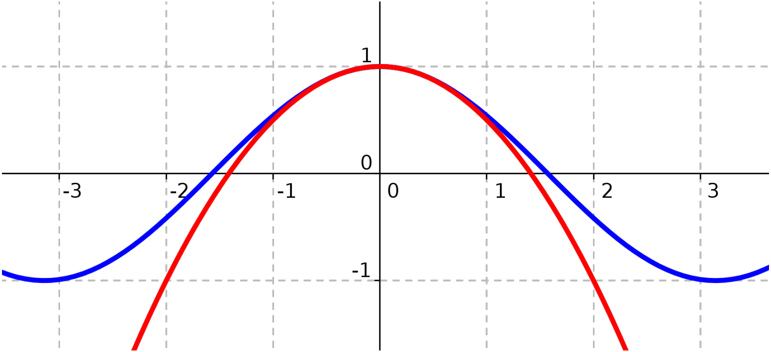


Exemplo 4

Determine o polinômio de Taylor de grau $2n$ da função $f(x) = \cos(x)$.

Polinômio de grau $n = 1$:

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

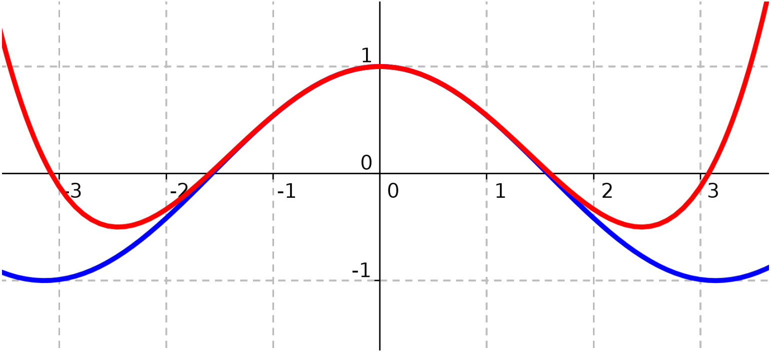


Exemplo 4

Determine o polinômio de Taylor de grau $2n$ da função $f(x) = \cos(x)$.

Polinômio de grau $n = 2$:

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

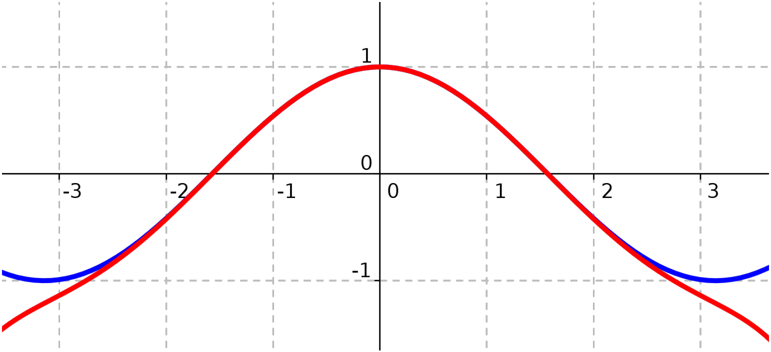


Exemplo 4

Determine o polinômio de Taylor de grau $2n$ da função $f(x) = \cos(x)$.

Polinômio de grau $n = 3$:

$$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6.$$



Exemplo 4

Determine o polinômio de Taylor de grau $2n$ da função $f(x) = \cos(x)$.

Polinômio de grau $2n$:

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

Diferenciais

Se $y = f(x)$, em que f é derivável, então $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Diferencial

Escrevemos

$$dy = f'(x)dx,$$

e chamamos diferencial as quantidades dy e dx.

Interpretação:

Interpretamos dy como sendo a pequena variação que y sofre quando x sofre uma pequena variação dx.

Note que dy depende de ambos dx e $f'(x)$.

Exemplo 5

O raio de uma esfera tem $21cm$, com um possível erro de medida de no máximo $0.05cm$. Qual o erro máximo cometido ao usar esse raio para calcular o volume da esfera?

Lembre-se que o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exemplo 5

O raio de uma esfera tem $21cm$, com um possível erro de medida de no máximo $0.05cm$. Qual o erro máximo cometido ao usar esse raio para calcular o volume da esfera?

Lembre-se que o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Resposta: O erro máximo cometido é

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277cm^3.$$

Portanto, o erro (absoluto) é aproximadamente $277cm^3$.

O erro absoluto é grande ou pequeno?

Exemplo 5

O raio de uma esfera tem 21cm, com um possível erro de medida de no máximo 0.05cm. Qual o erro máximo cometido ao usar esse raio para calcular o volume da esfera?

Lembre-se que o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Erro Relativo

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r} \approx 0,007 = 0,7\%.$$

Taxas Relacionadas

Ideia:

Calcular a taxa de variação de uma grandeza usando a taxa de variação de outra grandeza, supostamente mais fácil de ser medida.

Exemplo 6

Ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de $100 cm^3/s$. Quão rápido o raio está crescendo quando o diâmetro for $50 cm$?

Lembre-se que o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Taxas Relacionadas

Ideia:

Calcular a taxa de variação de uma grandeza usando a taxa de variação de outra grandeza, supostamente mais fácil de ser medida.

Exemplo 6

Ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de $100cm^3/s$. Quão rápido o raio está crescendo quando o diâmetro for $50cm$?

Lembre-se que o volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Resposta: A taxa de crescimento do raio do balão é

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{25\pi} cm/s \approx 0,0127 cm/s.$$

Exemplo 7

Uma escada com $5m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede, a uma taxa de $1m/s$, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a $3m$ da parede?

Exemplo 7

Uma escada com $5m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede, a uma taxa de $1m/s$, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a $3m$ da parede?

Resposta: A velocidade do topo da escada é

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4} m/s.$$

Exemplo 8

Um tanque com água tem a forma de um cone circular invertido, com base de raio $2m$ e altura igual a $4m$. Se a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $2m^3/min$, encontre a taxa pela qual o nível da água estará se elevando quando a água estiver $3m$ de profundidade.

Lembre-se que o volume do cone circular é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Exemplo 8

Um tanque com água tem a forma de um cone circular invertido, com base de raio $2m$ e altura igual a $4m$. Se a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $2m^3/min$, encontre a taxa pela qual o nível da água estará se elevando quando a água estiver $3m$ de profundidade.

Lembre-se que o volume do cone circular é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
Resposta: A taxa de variação do nível da água em $h = 3m$ é

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi} m/min.$$

Exemplo 9

O carro A segue em direção oeste a $90km/h$ e o carro B segue rumo ao norte a $100km/h$. Ambos estão se dirigindo para a intersecção de duas estradas. A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a $60m$ e o carro B está a $80m$ da intersecção?

Dica: $\sqrt{0,06^2 + 0,08^2} = 0,1$.

Exemplo 9

O carro A segue em direção oeste a $90km/h$ e o carro B segue rumo ao norte a $100km/h$. Ambos estão se dirigindo para a intersecção de duas estradas. A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a $60m$ e o carro B está a $80m$ da intersecção?

Dica: $\sqrt{0,06^2 + 0,08^2} = 0,1$. **Resposta:** A taxa com que os carros aproximam um do outro é

$$\frac{dz}{dt} = 134km/h.$$

Exemplo 10

Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de $1,5 m/s$. Um holofote, localizado no chão a $6m$ do caminho, é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a $8m$ do ponto do caminho mais próximo da luz?

Lembre-se que $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ e $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.

Exemplo 10

Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de $1,5 m/s$. Um holofote, localizado no chão a $6m$ do caminho, é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a $8m$ do ponto do caminho mais próximo da luz?

Lembre-se que $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ e $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.

Resposta: O holofote está girando a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{100} rad/s.$$

A resposta da tradução da 6^a edição está errada pois foram convertidas as unidades no enunciado mas não na resposta!

MA111 - Cálculo I

Aula 12 - Aproximações Lineares, Polinômios de Taylor, Diferenciais e Taxas Relacionadas.

Marcos Eduardo Valle

Considerações Finais

A linearização, que é válida para x próximo de a, corresponde à aproximar a função pela reta tangente.

O polinômio de Taylor aproxima a função e suas derivadas num ponto a.

As diferenciais são usadas para estimar uma pequena variação da variável dependente conhecendo a variação da variável independente e sua derivada.

Finalmente, taxas relacionadas são utilizadas para determinar a variação de uma grandeza conhecendo a taxa de variação de outra, supostamente mais fácil de ser medida.

Muito grato pela atenção!