MA111 - Cálculo I

Aula 11 – Derivação Implícita. Derivada das Funções Logarítmicas e Trigonométricas Inversas.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Motivação para a Derivação Implícita

Nas aulas anteriores, vimos como calcular a derivada y' quando y é expressa de forma *explícita* como uma função de x, ou seja,

$$y = f(x).$$

Exemplo 1

A derivada da função

$$y = x \sin x,$$

é, pela regra do produto,

$$y' = \sin x + x \cos x.$$

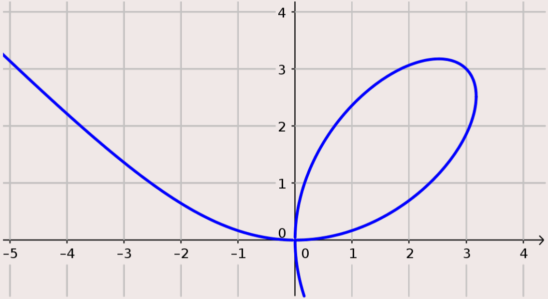
Em alguns casos, porém, y é definida implicitamente por uma relação entre x e y.

Exemplo 2 (Fólio de Descartes)

A equação

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

define a seguinte curva chamada fólio de Descartes:



No caso geral, y é definida implicitamente através da equação

$$\phi(x, y) = 0, \tag{1}$$

em que ϕ é uma função que depende de x e y.

Em alguns casos, é possível isolar y em (1) e escrever y explicitamente como uma função de x.

Felizmente, usando a regra da cadeia, não precisamos resolver (1) para calcular a derivada de y.

Podemos determinar y' usando a chamada derivação implícita.

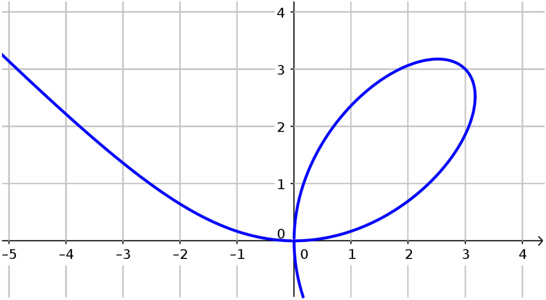
Exemplo 3

Considere o fólio de Descartes descrito por $x^3 + y^3 = 6xy$.

(a) Encontre y'.

(b) Encontre a reta tangente ao fólio de Descartes no ponto $(3, 3)$.

(c) Em qual ponto do primeiro quadrante a reta tangente é horizontal?



Resposta:

(a) Derivando ambos os lados da equação do fólio de Descartes e usando a regra da cadeia encontramos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

(b) No ponto $(x, y) = (3, 3)$, temos $y' = -1$ e, portanto, a reta tangente é

$$y - 3 = (-1)(x - 3) \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = 6.$$

(c) A reta tangente é horizontal se $y' = 0$. Com isso, encontramos o ponto $(2^{4/3}, 2^{5/3})$.

Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

Usando a derivação implícita e lembrando que

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = sec^2 x \quad \text{e} \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

obtemos as seguintes derivadas.

Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^{-1} x\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1} x\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} x\right] = \frac{1}{1+x^2}.$$

Derivada de $\text{sen}^{-1}(x)$:

Sabemos que

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \iff \quad \text{sen}\, y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Derivando $\text{sen}\, y = x$ implicitamente e lembrando que

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

obtemos

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \iff \quad \frac{d}{dx}\left[sen^{-1}(x)\right] = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exemplo

Exemplo 4

Derive

(a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1} x}$.

(b) $f(x) = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Exemplo

Exemplo 4

Derive

(a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1} x}$.

(b) $f(x) = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Resposta:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(sen^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Derivada do Logaritmo Natural

De um modo semelhante, usando a derivação implícita temos:

Derivada da Função Logaritmo:

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Exemplo 5

Derive

$$y = \ln(x^3 + 1).$$

Derivada do Logaritmo Natural

De um modo semelhante, usando a derivação implícita temos:

Derivada da Função Logaritmo:

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Exemplo 5

Derive

$$y = \ln(x^3 + 1).$$

Resposta: Usando a regra da cadeia, obtemos

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

De um modo geral, usando a regra da cadeia concluímos que:

Derivada da Função Logaritmo:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln g(x)\right] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Exemplo 6

Encontre

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(\operatorname{sen} x)\right].$$

De um modo geral, usando a regra da cadeia concluímos que:

Derivada da Função Logaritmo:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln g(x)\right] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Exemplo 6

Encontre

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(\operatorname{sen} x)\right].$$

Resposta:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(\operatorname{sen} x)\right] = \operatorname{cotg} x.$$

O Número e como um limite:

Considere $f(x) = \ln x$. Por um lado,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Usando a continuidade da função exponencial, concluímos que:

O Número e como um limite:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

O Número e como um limite:

Considere $f(x) = \ln x$. Por um lado,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Usando a continuidade da função exponencial, concluímos que:

O Número e como um limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exemplos

Exemplo 7

Encontre y' se

$$\sin(x + y) = y^2 \cos x.$$

Exemplos

Exemplo 7

Encontre y' se
$$\sin(x+y) = y^2 \cos x.$$

Resposta:
$$y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x+y)}{2y\cos x - \cos(x+y)}.$$

Exemplos

Exemplo 8

Encontre y'' se

$$x^4 + y^4 = 16$$

Exemplos

Exemplo 8

Encontre y'' se
$$x^4 + y^4 = 16$$

Resposta:
$$y'' = -48\frac{x^2}{y^7}.$$

Exemplos

Exemplo 9

Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

Exemplos

Exemplo 9

Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

Resposta:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)}.$$

Exemplos – Derivação Logarítmica

A derivação implícita e derivada de funções logarítmicas podem ser usadas para calcular a derivada de funções complicadas envolvendo produtos, quociente e potências. Vejamos.

Exemplo 10

Derive

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.$$

Exemplos – Derivação Logarítmica

A derivação implícita e derivada de funções logarítmicas podem ser usadas para calcular a derivada de funções complicadas envolvendo produtos, quociente e potências. Vejamos.

Exemplo 10

Derive

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.$$

Resposta:

$$y' = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right).$$

Exemplo 11

Derive

$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Exemplo 11

Derive
$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Resposta:
$$y' = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x} + 2).$$

Considerações Finais

A derivação implícita pode ser usada para encontrar y' quando y é definido implicitamente pela equação

$$\phi(x, y) = 0,$$

para alguma função ϕ que depende de x e y.

A derivação implícita, combinada com a regra da cadeia, foi utilizada para encontrar a derivada das funções trigonométricas inversas.

De um modo semelhante, deduzimos também a derivada da função ln e vimos a derivação logarítmica.

Muito grato pela atenção!