MA111 - Cálculo I

Aula 9 - Regra da Cadeia. Derivada de Funções Trigonométricas.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Motivação para a Regra da Cadeia

Sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\right] = 2x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x.$$

Como derivar

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}\right]?$$

No caso geral, como derivar a composta $\phi = g \circ f$ de duas funções f e g, ou seja, qual a derivada de

$$\phi(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)?$$

Regra da Cadeia

Teorema 1 (Regra da Cadeia)

Suponha que $y = f(x)$ e $z = g(y)$ e ambas derivadas $f'(x)$ e $g'(y)$ existam. A derivada da composta $\phi(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ também existe e satisfaz:

$$\phi'(x) = g'(y)f'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

Observação:

Alternativamente, podemos escrever a regra da cadeia como

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Exemplo 2

Calcule a derivada da função $\phi(x) = e^{x^2}$.

Exemplo 2

Calcule a derivada da função $\phi(x) = e^{x^2}$.

Resposta: Tomando $y = f(x) = x^2$ e $z = g(y) = e^y$, pela regra da cadeia temos que a derivada de $z = \phi(x)$ é

$$\phi'(x) = g'(y)f'(x) = e^y(2x) = 2xe^{x^2}.$$

Ideia da demonstração da regra da cadeia

Pela definição de derivada, devemos calcular o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\big[f(x+h)\big] - g\big[f(x)\big]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{h} = (*),$$

em que $y = f(x)$ e tomamos $k = f(x+h) - f(x)$. Multiplicando e dividindo por $k = f(x+h) - f(x)$, obtemos

$$(*) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(y+k) - g(y)}{k}\right)\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = g'(y)f'(x).$$

pois f, sendo derivável, ela é contínua e $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$.

Limite Fundamental

Teorema 3 (Limite Fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Mostra-se aplicando o Teorema do Confronto na desigualdade

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \forall x \neq 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Derivada da Função Seno

Sabemos que

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos a \operatorname{sen} b.$$

Identificando $a+b = x+h$ e $a-b = x$, ou seja, $a = x + \frac{h}{2}$ e $b = \frac{h}{2}$, obtemos da definição de derivada como um limite que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})} \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

Derivada da Função Cosseno

Sabemos que

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b.$$

Identificando $a+b = x+h$ e $a-b = x$, ou seja, $a = x + \frac{h}{2}$ e $b = \frac{h}{2}$, obtemos da definição de derivada como um limite que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\cos x] &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}(x+\frac{h}{2})\,\mathrm{sen}(\frac{h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\mathrm{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\mathrm{sen}(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})} \\
&= -\mathrm{sen}(x).
\end{aligned}$$

Derivada da Função Tangente

Pela regra do quociente, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right] \\
&= \frac{\cos x \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

Derivada das Funções Trigonométricas:

Resumindo, as derivadas das funções trigonométricas satisfazem:

- $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$,
- $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$,
- $\dfrac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$,
- $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$.

Exemplos

Exemplo 4

Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{4x}$$

Exemplos

Exemplo 4

Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{4x}$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{4x} = \frac{7}{4}.$$

Exemplos

Exemplo 5

Calcule

$$\lim_{x \to 0} x\text{cotg}x.$$

Lembre-se que

$$\text{cotg}x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}.$$

Exemplos

Exemplo 5

Calcule

$$\lim_{x \to 0} x \text{cotg} x.$$

Lembre-se que

$$\text{cotg} x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}.$$

Resposta:

$$\lim_{x \to 0} x \text{cotg} x = 1.$$

Exemplos

Exemplo 6

Derive a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Exemplos

Exemplo 6

Derive a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Resposta:

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Exemplos

Exemplo 7

Derive as funções

$$y = \operatorname{sen}(x^2) \quad \text{e} \quad z = \operatorname{sen}^2 x.$$

Exemplos

Exemplo 7

Derive as funções

$$y = \operatorname{sen}(x^2) \quad \text{e} \quad z = \operatorname{sen}^2 x.$$

Resposta:

$$y' = 2x\cos(x^2) \quad \text{e} \quad z' = 2\operatorname{sen} x \cos x.$$

Exemplos

Exemplo 8

Derive a função

$$f(x) = \operatorname{sen}\big(\cos(\tan x)\big).$$

Exemplos

Exemplo 8

Derive a função
$$f(x) = \operatorname{sen}\big(\cos(\tan x)\big).$$

Resposta:

$$f'(x) = -\cos\big(\cos(\tan x)\big)\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos a regra da cadeia, que é utilizada para derivar uma função composta.

Na aula de hoje, apresentamos também o limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

e deduzimos a derivada das principais funções trigonométricas.

Na próxima aula, apresentaremos a derivada das funções logarítmicas.

Muito grato pela atenção!