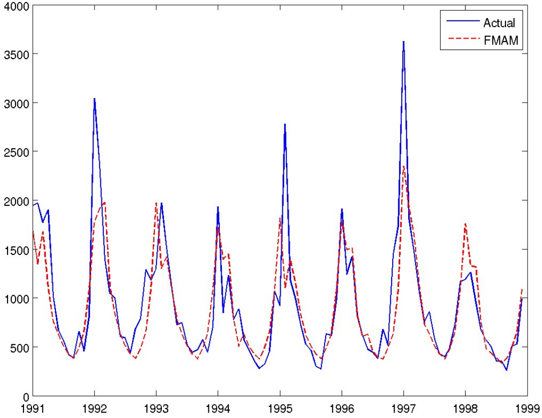
MA111 - Cálculo I

Aula 1 - Funções

Marcos Eduardo Valle

Motivação

Uma função pode ser usada, por exemplo, para estimar a vazão na usina hidrelétrica de Furnas.



Definição Ingênua de Função

Uma função é uma lei que associa cada elemento $x \in D$ um único elemento $y = f(x) \in E$.

Notação:

$$f : D \longrightarrow E$$

Nomenclatura:

- Domínio de f é D e o contra-domínio é E.
- Imagem: $\{y \in E : y = f(x), x \in D\}$.
- Gráfico:
$$\{(x, y) : y = f(x), x \in D\}.$$
- x e y são chamados respectivamente variável independente e variável dependente.

Função Linear

Uma função dada pela equação

$$f(x) = mx + b,$$

em que

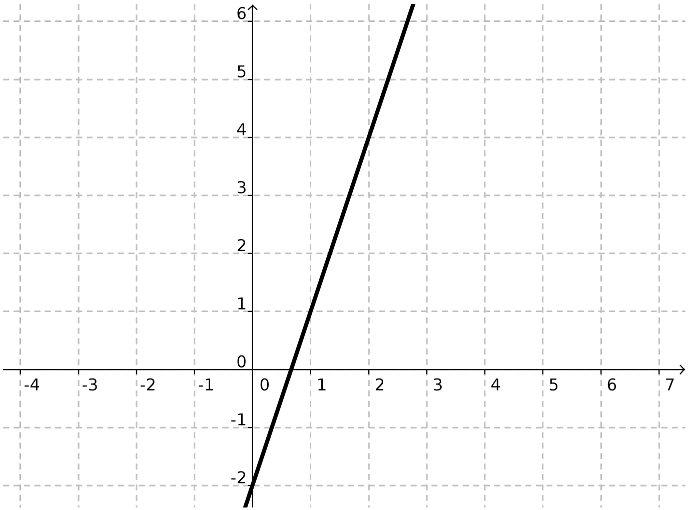
- m é chamado coeficiente angular.
- b é a intersecção com o eixo y (vertical).

é chamada **função linear**.

Observação:

O nome acima, embora muito usado, não é muito apropriado pois o termo *linear* aparece em muitos outros contextos na matemática. O nome correto é **função afim**

O gráfico da função linear $f(x) = 3x - 2$ é



Polinômios

Uma função dada pela equação

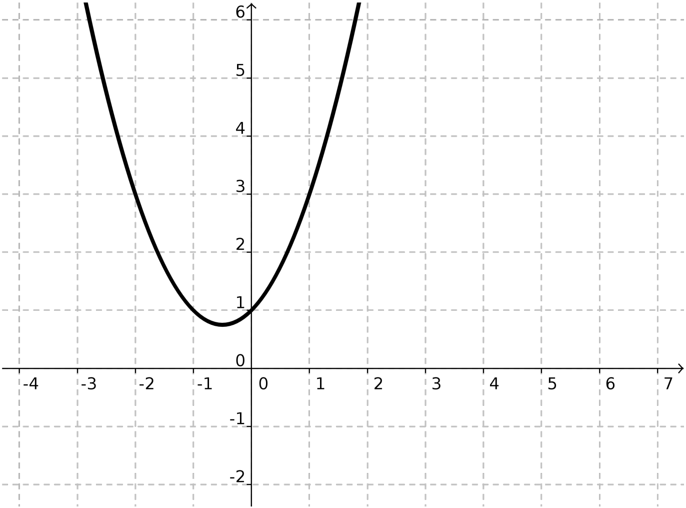
$$P(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$

em que

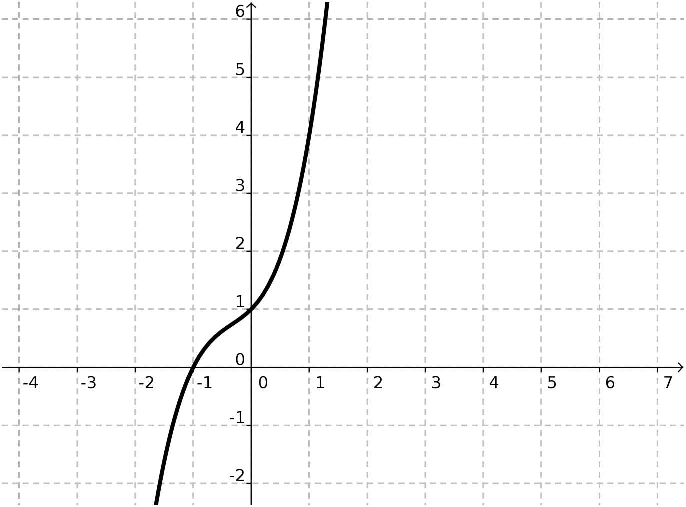
- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados coeficientes.
- n, para $a_n \neq 0$, é o grau do polinômio.

é um **polinômio** ou **função polinomial**.

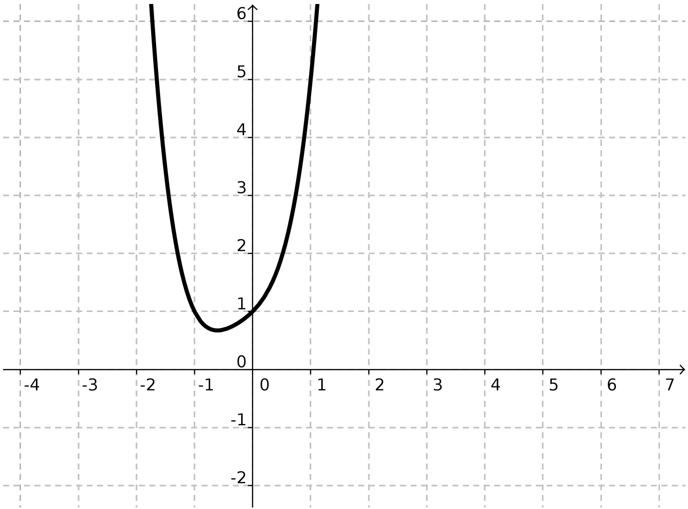
O gráfico do polinômio $P_2(x) = 1 + x + x^2$ de grau 2 é



O gráfico do polinômio $P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ de grau 3 é



O gráfico do polinômio $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ de grau 4 é



Funções Racionais, Algébricas e Transcendentais

Uma função dada pelo quociente

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

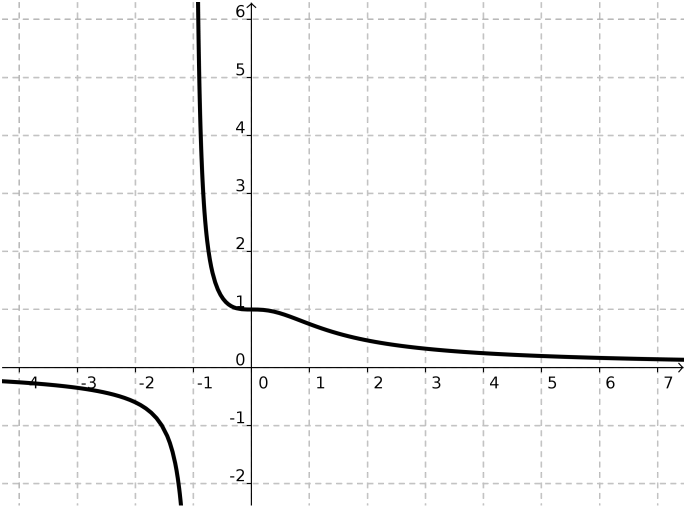
em que P e Q são polinômios, é chamada **função racional**.

De um modo mais geral, funções definidas por meio de operações algébricas em polinômios são chamadas **funções algébricas**.

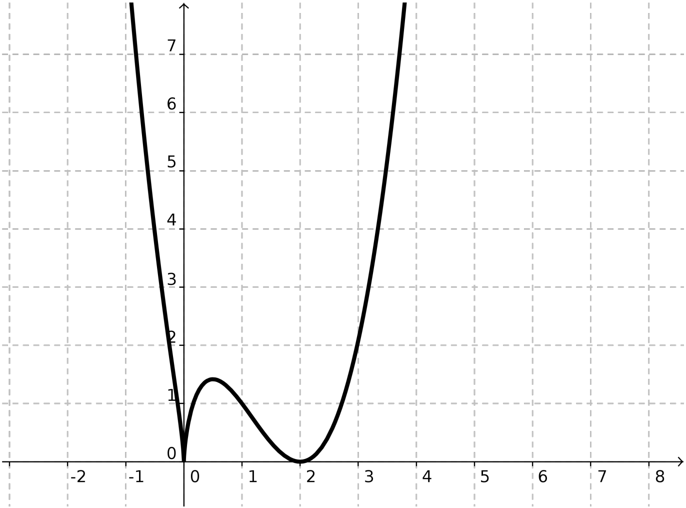
As funções que não são algébricas são chamadas **funções transcendentais**. Exemplos de funções transcendentais incluem:

- Funções Trigonométricas.
- Funções Exponenciais.
- Funções Logarítmicas.

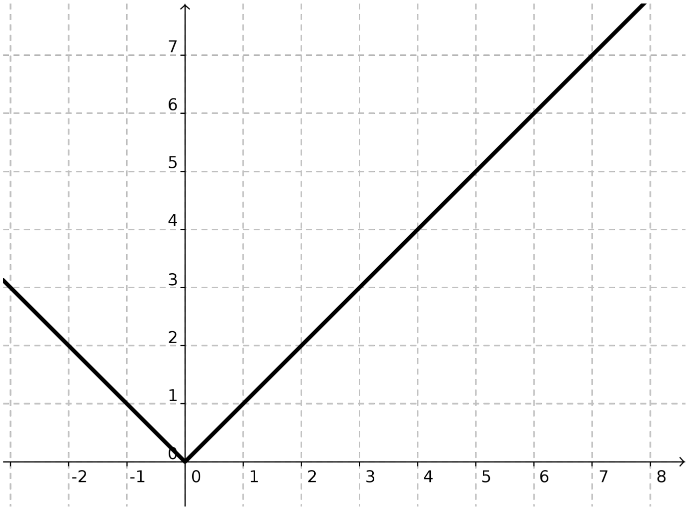
O gráfico da função racional $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}$ é



O gráfico da função algébrica $f(x) = x^{2/3}(x-2)^2$ é



O gráfico da função valor absoluto $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ é



Translação Vertical e Horizontal

Considere uma função f.

- A função

$$g(x) = f(x) + c$$

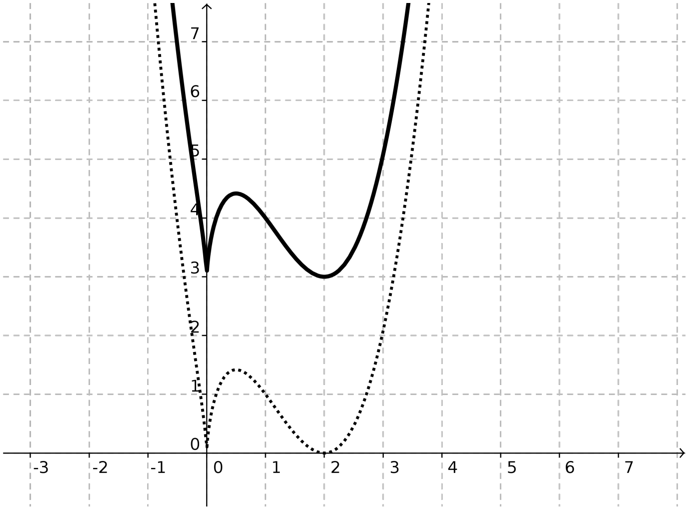
é obtida pela translação (deslocamento) **vertical** de f em c unidades.

- A função

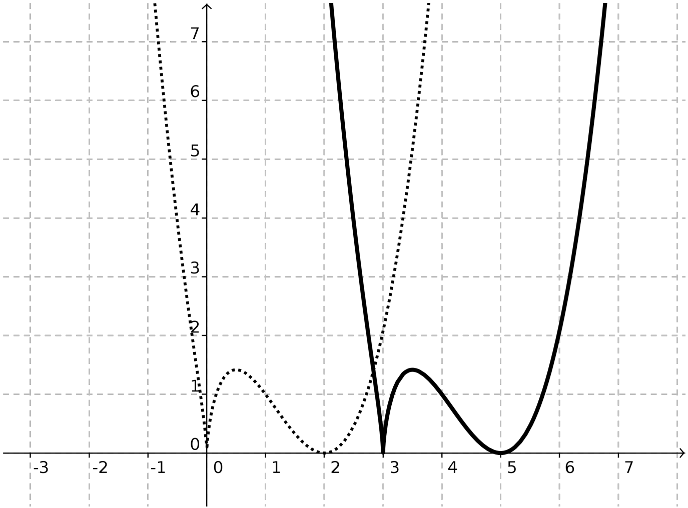
$$g(x) = f(x - \gamma),$$

é uma outra função obtida pela translação (deslocamento) **horizontal** de f em γ unidades.

O gráfico abaixo mostra a translação vertical da função algébrica $f(x) = x^{2/3}(x-2)^2$ considerando $c = 3$.



O gráfico abaixo mostra a translação horizontal da função algébrica $f(x) = x^{2/3}(x-2)^2$ considerando $\gamma = 3$.

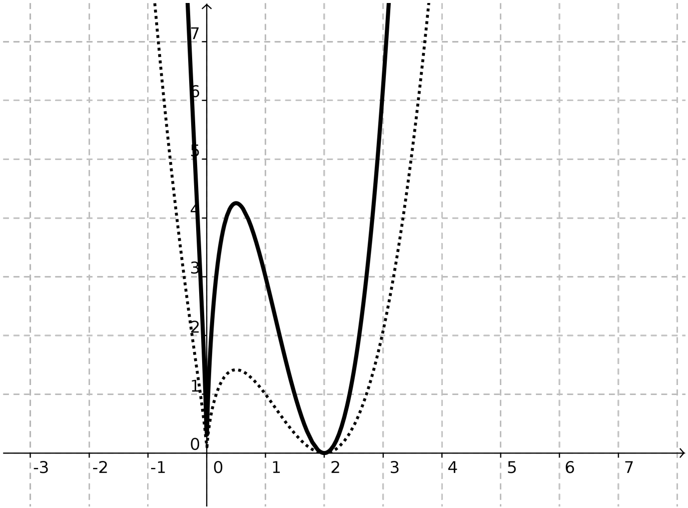


Expansão e Contração

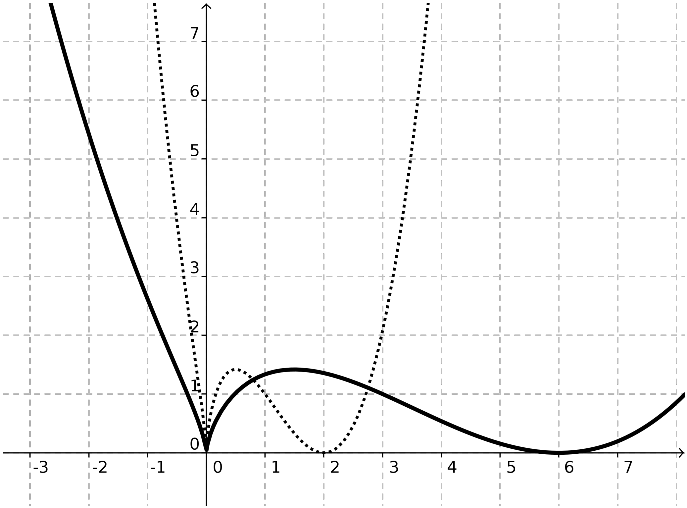
Considere uma função f.

- A função
$$g(x) = cf(x),$$
corresponde à uma **expansão vertical** de f se $c > 1$, uma **contração vertical** se $0 < c < 1$ e uma **reflexão com respeito ao eixo horizontal** quando $c = -1$.
- A função
$$g(x) = f(x/\gamma),$$
corresponde à uma **expansão horizontal** de f se $\gamma > 1$, uma **contração horizontal** se $0 < \gamma < 1$ e uma **reflexão com respeito ao eixo vertical** quando $\gamma = -1$.

O gráfico abaixo mostra a expansão vertical da função algébrica $f(x) = x^{2/3}(x-2)^2$ considerando $c = 3$.



O gráfico abaixo mostra a expansão horizontal da função algébrica $f(x) = x^{2/3}(x-2)^2$ considerando $\gamma = 3$.



Composta e Algumas Propriedades de Funções

Composta

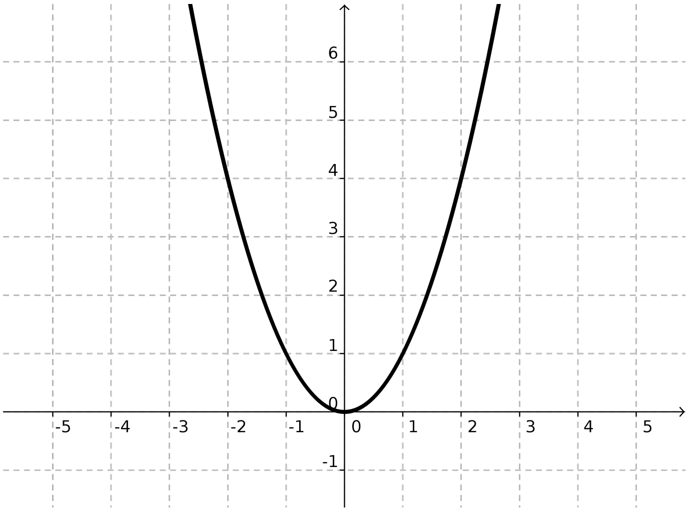
Dadas funções f e g, a composta de f com g é a função

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Propriedades:

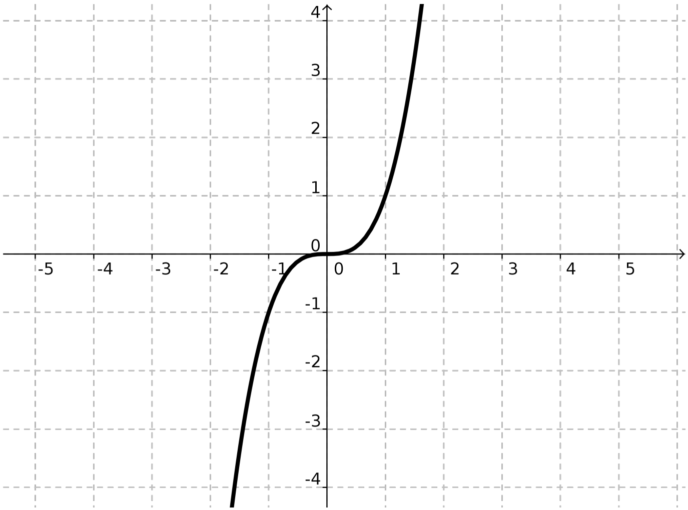
- Função Par: $f(-x) = f(x)$.
- Função Ímpar: $f(-x) = -f(x)$.
  Existem funções que não são pares nem ímpares.
- Função Crescente: $t < x$ implica $f(t) < f(x)$.
- Função Decrescente: $t < x$ implica $f(t) > f(x)$.
  Existem funções que não são crescentes nem decrescente.

A função $f(x) = x^2$ é uma função par:



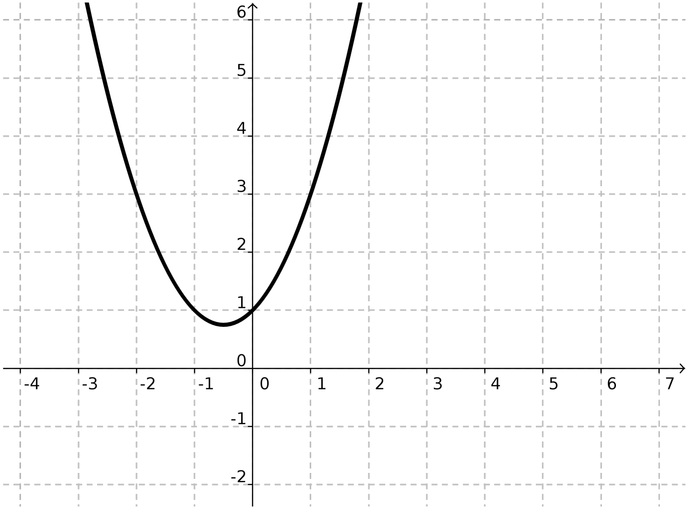
O gráfico dela é simétrico com respeito ao eixo vertical.

A função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar:

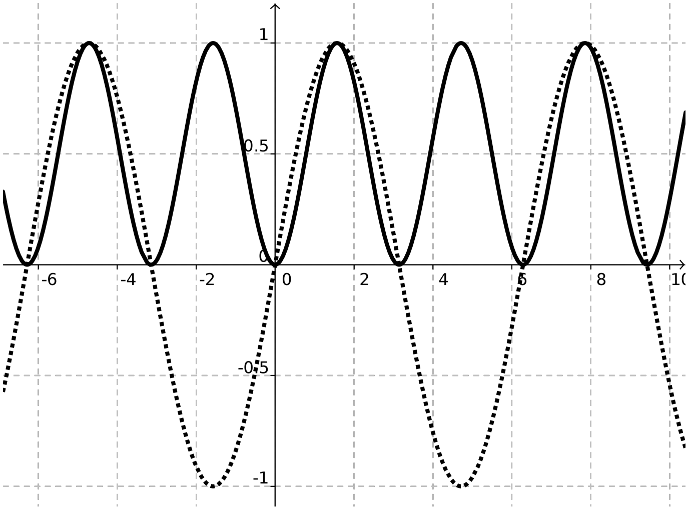


O gráfico dela é simétrico com respeito à origem.

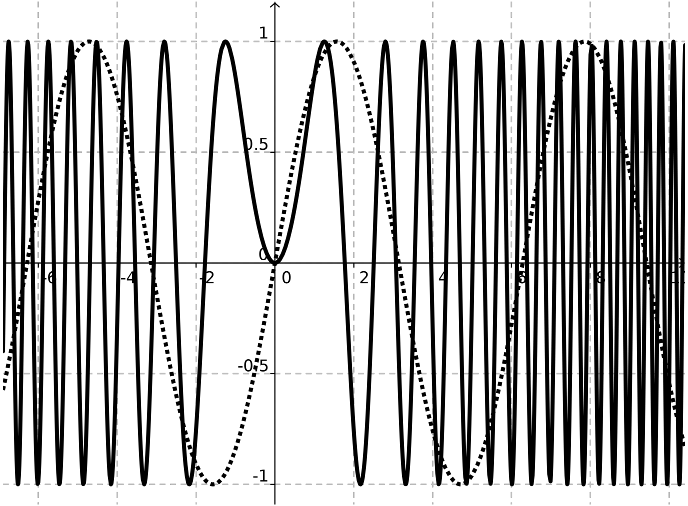
O gráfico abaixo mostra uma função $f(x) = x^2 + x + 1$ que não é par nem ímpar.



Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = sen(x)$. O gráfico abaixo mostra a composta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = sen^2(x)$.



Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = sen(x)$. O gráfico abaixo mostra a composta $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = sen(x^2)$.



Considerações Finais

O cálculo é uma ferramenta matemática para análise e construção de funções.

Na aula de hoje revisamos o conceito de funções.

Também vimos como classificar algumas funções e como construir novas funções a partir de outras.

Muito grato pela atenção!