Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS211 – Turmas L e M – 2o. Sem. 2019 – 2a. Prova – 19/11/2019

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

RESPOSTAS PURAMENTE NUMÉRICA NÃO SERÃO CONSIDERADAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

$$y_{k+1} = y_k + h(k_1 + k_2)/2, \quad \text{com} \quad k_1 = f(x_k, y_k) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_k + h, y_k + hk_1).$$

$$y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \text{ com } k_1 = f(x_k, y_k), k_2 = f(x_k + h/2, y_k + hk_1/2),$$
$$k_3 = f(x_k + h/2, y_k + hk_2/2) \quad \text{e} \quad k_4 = f(x_k + h, y_k + hk_3).$$

$$v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k)}{h}, \quad v'(x_k) \approx \frac{v(x_k) - v(x_k - h)}{h} \quad \text{e} \quad v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h}.$$

$$v''(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - 2v(x_k) + v(x_k - h)}{h^2}.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) + \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

$$I(f) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) - nf''(\xi) \frac{h^3}{12}.$$

$$I(f) = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) - nf^{(iv)}(\xi) \frac{h^5}{180}.$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} \alpha_k g_k(x), \quad \text{com} \quad \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}, \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) \quad \text{e} \quad h_i = \sum_{k=1}^{m} y_k g_i(x_k).$$

Boa Prova!

Questão 1. Considere a tabela

x	-3	-2	-1	0	1	3	4
$f(x)$	42	15	4	3	6	0	-21

(a) Existem dois polinômios distintos de grau menor ou igual à 6 que interpolam o conjunto de pontos tabelados? Justifique sua resposta.

(b) Estime o valor de $f(2)$ usando um polinômio interpolador de grau 3. Justifique sua resposta.

(c) Estime o valor de $f(2)$ usando um polinômio interpolador linear por partes.

(d) Se os dados possuem ruído, interpolação polinômial é uma técnica apropriada para tratar os dados? No caso afirmativo, justifique as vantagens da interpolação polinômial. No caso negativo, indique uma técnica mais adequada para estimar f a partir dos dados.

Questão 2. Considere os dados tabelados

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	0	-1	-2

(a) Usando o método dos quadrados mínimos, determine α_0, α_1 e α_2 de modo que a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_0 & x \leq 0, \\ \alpha_2 x + \alpha_0 & x > 0, \end{cases}$$

ajuste aos dados tabelados. Note que $\varphi(x)$ é uma função linear por partes com o mesmo α_0 em ambas expressões.

(b) Falso ou verdadeiro: Ajustar uma função da forma $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x}$ aos dados tabelados usando o método dos quadrados mínimos envolve a resolução de um sistema de equações não-lineares. Justifique sua resposta. Não é necessário fazer as contas.

Questão 3. Considere a integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

as desigualdades

$$|f'(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{e}}, \quad |f''(x)| \leq 2 \quad \text{e} \quad |f^{(iv)}(x)| \leq 12, \quad \forall x \in [0,1],$$

e a tabela

x	0.00	0.20	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.80	1.00
e^{-x^2}	1.00	0.96	0.94	0.85	0.78	0.70	0.57	0.53	0.37

(a) Quantos pontos igualmente espaçados são necessários para ter uma aproximação da integral $I(f)$ com um erro menor que 10^{-3} usando a regra dos trapézios repetida? Não é necessário fazer as contas!

(b) Estime o valor da integral $I(f)$ usando a regra 1/3 de Simpson repetida com $h = 0.25$. O que pode ser dito sobre o erro cometido?

Questão 4. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y'' + xy' - y = x^2 \tag{1}$$

(a) Re-escreva a equação (1) como um sistema de primeira ordem.

(b) Supondo $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, estime $y(0,1)$ e $y'(0,1)$ utilizando o método de Euler com $h = 0,1$.

(c) Supondo $y(0) = y(1) = 1$, exiba o sistema de equações lineares que produz a solução numérica da respectiva equação diferencial com $h = 0,25$ e aproximações de $\mathcal{O}(h^2)$. Não é necessário resolver o sistema linear para determinar a solução numérica!