Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS211 – Turmas L e M – 2o. Sem. 2019 – 1a. Prova – 24/09/2019

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

RESPOSTAS PURAMENTE NUMÉRICA NÃO SERÃO CONSIDERADAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

INFORMAÇÕES ÚTEIS

Um número real $x \neq 0$ é representado num sistema de ponto flutuante $F(\beta, t, m, M)$ como

$$x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_t \times \beta^e,$$

em que β é a base, t é o número de dígitos na mantissa, $0 \leq d_j \leq \beta - 1$ com $d_1 \neq 0$, e $-m \leq e \leq M$.

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real de dimensão $n \times n$:

- **Critério das linhas:** $$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$
- **Critério de Sassenfeld:** $$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Identidades trigonométricas e derivadas:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)} = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}.$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}(x)}{dx} = \sec^2 x \quad \text{e} \quad \frac{d\,\mathrm{cotg}(x)}{dx} = -\,\mathrm{cosec}^2(x).$$

Boa Prova!

Questão 1. (2,5 pontos)

(a) Determine a fatoração LU, com pivoteamento parcial, da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 9/2 & 3/2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

(b) Use o item anterior para encontrar a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{b} = (6, 0, 0)$.

Questão 2. Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(a) É possível resolver o sistema linear acima utilizando o método de Gauss-Jacobi de modo que se tenha a garantia da sua convergência? Se sim, então, escreva as equações (para cada componente ou de forma matricial) do método de Gauss-Jacobi que garantem a convergência do método.

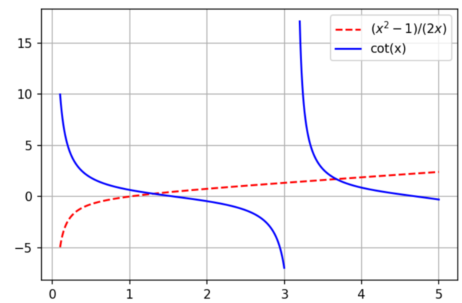
(b) É possível resolver o sistema linear acima utilizando o método de Gauss-Seidel de modo que se tenha a garantia da sua convergência? Se sim, então, escreva as equações (para cada componente ou de forma matricial) do método de Gauss-Seidel que garantem a convergência do método.

Questão 3. (2,5 pontos)

Na teoria do transporte de nêutrons, o comprimento crítico de uma barra de combustível é determinado pelas raízes da equação

$$\text{cotg}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}, \tag{3}$$

cujo gráfico dos termos do lado direito e esquerdo da equação estão apresentados na figura ao lado.



(a) Apresente um intervalo de comprimento 1 que contém a menor raíz da equação (3).

(b) Após quantas iterações do método da bissecção com o intervalo do item (a), teremos uma aproximação para raíz com erro absoluto menor que 10^{-6}?

(c) Determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ fornece a raíz de (3) e escreva a iteração de Newton usada para encontrar a raíz de (3). Não é necessário fazer uma iteração do método de Newton!

(d) Formule (3) como um problema de ponto fixo.

(e) Usando o item anterior e considerando a aproximação inicial $x_0 = 1$, efetue duas iterações do método do ponto fixo e comente sobre o resultado obtido.

Questão 4. (2,5 pontos) Problemas de autovalores ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia. Considere a matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. O problema de autovalor corresponde à determinar um escalar λ e um vetor não-nulo $\mathbf{v} = (x, y)$ tal que

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Impondo $\|\mathbf{v}\|_2^2 = x^2 + y^2 = 1$, que garante que $\mathbf{v} = (x, y)$ é um vetor não-nulo, pode-se formular o problema de autovalor como um sistema com três equações não-lineares nas incógnitas x, y e λ.

(a) Apresente $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{F}(x, y, \lambda) = (0; 0; 0)$ fornece a solução do problema de autovalor com $\|\mathbf{v}\|_2^2 = 1$.

(b) Determine a matrix Jacobiana do sistema não-linear $\mathbf{F}(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$.

(c) Apresente o sistema linear usado para determinar o passo de Newton.

(d) Considerando duas casas decimais, execute uma iteração do método Newton no problema de autovalor usando como aproximação inicial $(x^{(0)}, y^{(0)}, \lambda^{(0)}) = (1, 0, 1)$.

FOLHA ADICIONAL