Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS211 – Turmas L e M – 2o. Sem. 2019 – Exame – 10/12/2019

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

RESPOSTAS PURAMENTE NUMÉRICA NÃO SERÃO CONSIDERADAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

INFORMAÇÕES ÚTEIS

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

$$y_{k+1} = y_k + h(k_1 + k_2)/2, \quad \text{com} \quad k_1 = f(x_k, y_k) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_k + h, y_k + hk_1).$$

$$y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \text{ com } k_1 = f(x_k, y_k), k_2 = f(x_k + h/2, y_k + hk_1/2),$$
$$k_3 = f(x_k + h/2, y_k + hk_2/2) \quad \text{e} \quad k_4 = f(x_k + h, y_k + hk_3).$$

$$v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k)}{h}, \quad v'(x_k) \approx \frac{v(x_k) - v(x_k - h)}{h} \quad \text{e} \quad v'(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - v(x_k - h)}{2h}.$$

$$v''(x_k) \approx \frac{v(x_k + h) - 2v(x_k) + v(x_k - h)}{h^2}.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) + \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \text{com} \quad L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n] = \frac{f[x_{n-k+1}, \ldots, x_n] - f[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-k}}, \quad 1 \leq k < n.$$

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \ldots + \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \right) f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

$$I(f) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) - n f''(\xi) \frac{h^3}{12}.$$

$$I(f) = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) - n f^{(iv)}(\xi) \frac{h^5}{180}.$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} \alpha_k g_k(x), \quad \text{com} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} y_k g_i(x_k).$$

- **Critério das linhas:** $$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

- **Critério de Sassenfeld:** $$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right) < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Boa Prova!

Questão 1. Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \omega \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ \omega \\ -2\omega \end{bmatrix}$$

em que $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Usando pivoteamento parcial, determine a fatoração LU de $\mathbf{A}$. Em outras palavras, determine matrizes $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{P}$ tais que $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

(b) Usando o item (a), encontre uma solução do sistema linear acima para $\omega = 1$.

(c) Para quais valores de ω o sistema linear acima admite uma única solução?

Questão 2. Considere a tabela:

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	17	a	1	b	9

(a) Se $a = b = 1$, existe um único polinômio de grau 5 que interpola a tabela acima?

(b) Usando a regra 1/3 de Simpson repetida e todos os pontos da tabela acima com $a = b = 1$, estime o valor da integral $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx$.

(c) Determine valores de a e b de modo que o polinômio que interpola a tabela tenha grau 2.

Questão 3. Considere a tabela

x	0	1	2	3
y	0.3	0.1	0	0.01

e a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ce^{(a\cos(\pi x) + bx + 2b)}} - e^{-x}. \tag{1}$$

(a) Reescreva (1) de forma apropriada para aplicação do método dos quadrados mínimos.

(b) Exiba a equação normal que fornece a solução de quadrados mínimos do item (a) usando a tabela dada acima. Não é necessário resolver o sistema linear.

(c) Considerando $a = b = 0$ e $c = 2$, mostre que a função $f(x)$ dada por (1) possui uma raíz para $x \geq 0$.

(d) Escreva a iteração do método de Newton usada para encontrar a raíz do item anterior. Não é necessário encontrar a raíz.

Questão 4. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} 2(y'' - y) + y' = 1, \\ y(1) = 2, y'(1) = -1. \end{cases}$$

Utilizando o método de Euler com $h = 0,5$, determine aproximações para $y(2)$ e $y'(2)$.