Sobre Interatividade entre Números Fuzzy

Vinícius Francisco Wasques

vwasques@outlook.com

4 de junho de 2018

Conjuntos fuzzy

Definição

Seja U um conjunto. Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado através de uma função dada por:

$$A : U \to [0, 1]$$

chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy A.

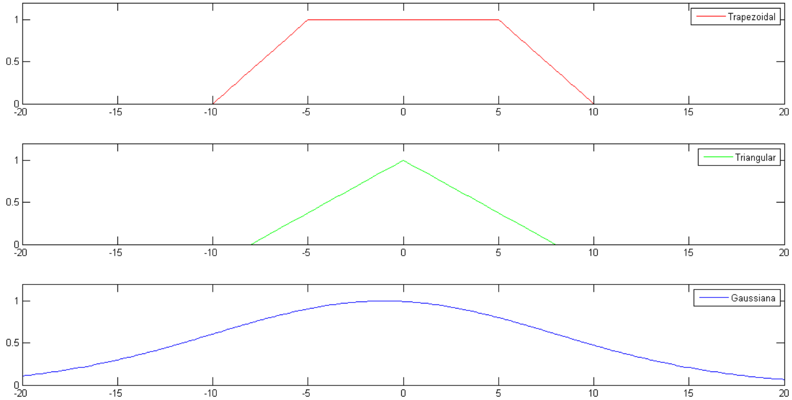

Figura: Conjuntos fuzzy.

Definição

*(α-**Nível**) Sejam A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0,1]$, o α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por:*

$$[A]^{\alpha} = \begin{cases} \{x \in U; A(x) \geq \alpha\} & , \quad \alpha \in (0,1] \\ \hline \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\} & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Definição

Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual A esta definido é o conjunto dos números reais e satisfaz as seguintes condições:

1. *Todos os α-níveis de A são não vazios com $0 \leq \alpha \leq 1$;*
2. *Todos os α-níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;*
3. *$suppA = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$ é limitado.*

Princípio de extensão de Zadeh

Definição

Sejam $A_1, ..., A_n$ subconjuntos fuzzy de X_1,...,X_n respectivamente e f uma função tal que $f : X_1 \times ... \times X_n \to Z$.
A extensão de Zadeh de f é a função $f_\wedge$ que aplicada a $A_1, ..., A_n$, fornece o subconjunto fuzzy $f_\wedge(A_1, ..., A_n)$ de Z, cuja função pertinência é definida por:

$$f_\wedge(A_1, ..., A_n)(z) = \bigvee_{(x_1,...,x_n)\in f^{-1}(z)} A_1(x_1) \wedge ... \wedge A_n(x_n)$$

onde $f^{-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n : f(x_1, ..., x_n) = z\}$.

Soma baseada no princípio de extensão de Zadeh

Sejam A_1, A_2 números fuzzy e $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o operador soma dado por $+(x, y) = x + y$. A extensão de Zadeh do operador soma é dado por $+_\wedge(A_1, A_2) = A_1 +_\wedge A_2$ cuja função de pertinência é dada por:

$$(A_1 +_\wedge A_2)(z) = \bigvee_{x_1 + x_2 = z} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)$$

Se os α-níveis de A_1 e A_2 são dados respectivamente por $[a1^-_\alpha, a1^+_\alpha]$ e $[a2^-_\alpha, a2^+_\alpha]$ então os α-níveis da soma baseada na extensão de Zadeh são dados por:

$$[A_1 +_\wedge A_2]^\alpha = [a1^-_\alpha + a2^-_\alpha, a1^+_\alpha + a2^+_\alpha]$$

De modo similar a diferença é dada por:

$$[A_1 -_\wedge A_2]^\alpha = [a1^-_\alpha - a2^+_\alpha, a1^+_\alpha - a2^-_\alpha]$$

Exemplo

Sejam $A_1 = A_2 = (-1, 0, 1)$ números fuzzy, cujos α-níveis são dados por $[A_1]^\alpha = [A_2]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$. Desse modo, os α-níveis da soma são dados por $[A_1 +_\wedge A_2]^\alpha = [2\alpha - 2, 2 - 2\alpha]$. Portanto,

$$A_1 +_\wedge A_2 = (-2, 0, 2)$$

Definição

Uma t-norma é uma função $t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Identidade:* $t(1, x) = x$
- *Comutativa:* $t(x, y) = t(y, x)$
- *Associativa:* $t(x, t(y, z)) = t(t(x, y), z)$
- *Monotonicidade: Se* $t(x, y) \leq t(z, w)$ *então* $x \leq z$ *e* $y \leq w$

Exemplo

1. *(Mínimo)* $t_{\wedge}(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y$

2. *(Produto)* $t_{*}(x, y) = x * y = xy$

3. *(Drástico)* $$t_d(x, y) = \begin{cases} x & se \;\; y = 1 \\ y & se \;\; x = 1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Relação Fuzzy

Uma relação fuzzy R sobre dois universos X_1 and X_2 é dada pela função

$$R : X_1 \times X_2 \to [0, 1],$$

onde $R(x_1, x_2) \in [0, 1]$ é o grau em que $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ estão associadas segundo a relação R. Isto é, R é um subconjunto fuzzy de $X_1 \times X_2$. Uma relação fuzzy n-ária sobre $X_1 \times ... \times X_n$ nada mais é que um subconjunto fuzzy de $X_1 \times ... \times X_n$.

Interatividade Fuzzy

"... an important concept in the case of fuzzy variables is that of *noninteraction*, which is analogous to the concept of independence in the case of random variables...Such fuzzy variables are *interactive* if the assignment of a value to one affects the fuzzy restrictions placed on the others."

Zadeh, L. A.
The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning.

Motivação

Em teoria de Probabilidades, duas variáveis aleatórias são independentes quando a ocorrência de uma não é influenciada pela ocorrência da outra. Formalmente, duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se e somente se:

$$P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x)P(Y = y),$$

em que $P(X = x \wedge Y = y)$ é chamada *distribuição de probabilidade conjunta*.

O objetivo é trazer o mesmo conceito para a teoria de conjuntos fuzzy.

Distribuição de Possibilidade Conjunta

Desse modo, para "decidir" se duas variáveis aleatórias são independentes ou não, é preciso primeiro definir qual a distribuição de probabilidade conjunta entre elas.

Na teoria de conjuntos fuzzy o conceito de interatividade é definido através de *Distribuição de Possibilidade Conjunta*.

Distribuição de Possibilidade Conjunta

Uma relação fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é dita uma distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy $A_1, ..., A_n$ se

$$A_i(y) = \bigvee_{x:x_i=y} J(x), \ \forall y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

para todo $i = 1, ..., n$.

Em outras palavras, J é uma distribuição de possibilidade conjunta se cada número fuzzy A_i pode ser obtido através da i-ésima projeção de J.

Exemplo

Sejam A_1 e A_2 números fuzzy. Então a relação $J(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta.

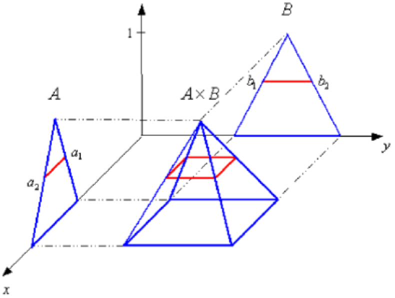

Figura: Distribuição de possibilidade conjunta baseada na t-norma do mínimo [2].

Em geral, se t é uma t-norma então a relação $J_t(x_1, x_2) = A_1(x_1)\ t\ A_2(x_2)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta baseada em t.

Números Fuzzy Interativos

Sejam $A_1, ..., A_n$ números fuzzy e J $\in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta entre eles.

$A_1, ..., A_n$ são ditos não interativos se

$$J(A_1, ..., A_n) = A_1(x_1) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n),$$

$A_1, ..., A_n$ são ditos interativos se a distribuição de possibilidade conjunta J entre eles não é dada pela t-norma do mínimo.

Números Fuzzy Completamente Correlacionados

Definição

Dois números fuzzy A_1 e A_2 são ditos completamente correlacionados se existirem $q, r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$ tais que a distribuição de possibilidade conjunta entre eles é dada por

$$J_{(q,r)}(x_1, x_2) = A_1(x_1)\chi_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2) = A_2(x_2)\chi_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & se \;\; qx_1 + r = x_2 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Exemplo

Sejam $A_1 = A_2 = (-1, 0, 1)$ números fuzzy. Tais números podem ser completamente correlacionados positivamente ou negativamente, pelas respectivas distribuições de possibilidades conjuntas $J_{(1,0)}$ e $J_{(-1,0)}$.

$$A_2 = 1A_1 + 0$$

$$A_2 = -1A_1 + 0$$

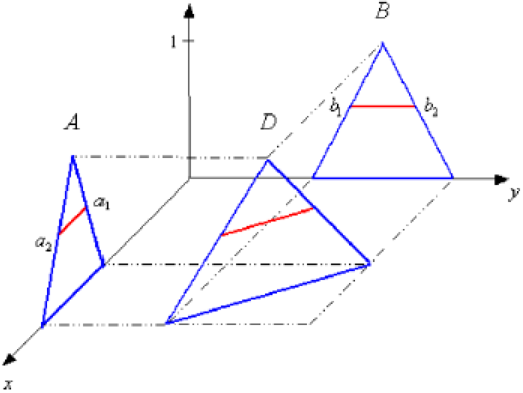

Figura: Números fuzzy completamente correlacionados positivamente [2].

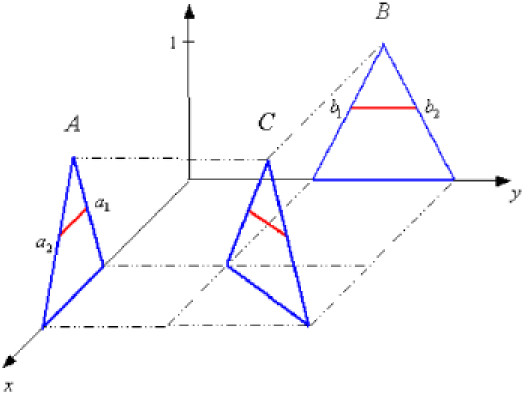

Figura: Números fuzzy completamente correlacionados negativamente [2].

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (-1, 0, 1)$ e $A_2 = (-2, 0, 2)$ são completamente correlacionados?

$$q = ? \qquad r = ?$$

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (-1, 0, 1)$ e $A_2 = (-2, 0, 2)$ são completamente correlacionados?

$$q = 2 \qquad r = 0$$

1: Os números fuzzy $A_1 = (-1, 0, 1)$ e $A_2 = (-2, 0, 2)$ são completamente correlacionados?

$$q = 2 \qquad r = 0$$

$$q = -2 \qquad r = 0$$

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (1, 2, 3)$ e $A_2 = (4, 5, 6)$ são completamente correlacionados?

$$q = ? \qquad r = ?$$

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (1, 2, 3)$ e $A_2 = (4, 5, 6)$ são completamente correlacionados?

$$q = 1 \qquad r = 3$$

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (1, 2, 3)$ e $A_2 = (4, 5, 6)$ são completamente correlacionados?

$$q = 1 \qquad r = 3$$

$$q = -1 \qquad r = 7$$

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (1, 2, 3)$ e $A_2 = (4, 5, 8)$ são completamente correlacionados?

$$q = ? \qquad r = ?$$

Exercícios

1: Os números fuzzy $A_1 = (1,2,3)$ e $A_2 = (4,5,8)$ são completamente correlacionados?

$$q = ? \qquad r = ?$$

Não existem valores de q e r tais que a propriedade

$$A_2 = qA_1 + r$$

seja satisfeita.

O conceito de completamente correlacionado não pode ser aplicado para todos os pares de números fuzzy.

Para que dois números fuzzy sejam completamente correlacionados, então necessariamente suas funções de pertinência precisam ter a mesma forma.

O parâmetro q está associado com a "amplitude" do número fuzzy enquanto que o parâmetro r está conectado com a translação do número fuzzy.

- Soma interativa de números fuzzy completamente correlacionados

$$[A_1 +_{J_{(q,r)}} A_2]^\alpha = (q+1)[A_1]^\alpha + r$$

- Diferença interativa de números fuzzy completamente correlacionados

$$[A_1 -_{J_{(q,r)}} A_2]^\alpha = (1-q)[A_1]^\alpha - r$$

Exemplo

$A_1 = (-1, 0, 1)$ e $A_2 = (-1, 0, 1)$ são completamente correlacionados segundo as distribuições de possibilidades conjuntas $J_{(1,0)}$ e $J_{(-1,0)}$.

Para $q = 1$ e $r = 0$ a soma e diferença interativas são dadas por:

$$[(-1, 0, 1) +_{J_{(q,r)}} (-1, 0, 1)]^\alpha = (1 + 1)[(-1, 0, 1)]^\alpha + 0 = (-2, 0, 2)$$
$$[(-1, 0, 1) -_{J_{(q,r)}} (-1, 0, 1)]^\alpha = (1 - 1)[(-1, 0, 1)]^\alpha - 0 = 0$$

Para $q = -1$ e $r = 0$ a soma e diferença interativas são dadas por:

$$[(-1, 0, 1) +_{J_{(q,r)}} (-1, 0, 1)]^\alpha = (-1 + 1)[(-1, 0, 1)]^\alpha + 0 = 0$$
$$[(-1, 0, 1) -_{J_{(q,r)}} (-1, 0, 1)]^\alpha = (1 + 1)[(-1, 0, 1)]^\alpha - 0 = (-2, 0, 2)$$

Modelo de Decaimento com Condição Inicial Fuzzy

O modelo de decaimento é dado pelo seguinte PVIF (problema de valor inicial fuzzy):

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = -dX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

sendo $d > 0$ a constante de decaímento e X_0 um número fuzzy.

Solução numérica através do método de Euler:

$$X_{t+1} = X_t \oplus h(-dX_t),$$

sendo h o tamanho do passo.

Tomando $\oplus = +_\wedge$, temos a seguinte solução numérica

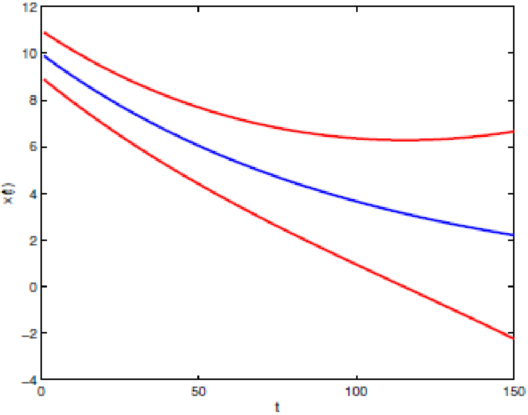

Figura: (vermelho) Suporte da solução numérica quando consideramos a soma baseada no princípio de extensão de Zadeh. (azul) o α-nível 1 da solução. Parâmetros utilizados: $X_0 = (9, 10, 11)$, $d = 0,1$ e passo $h = 0,1$ [2].

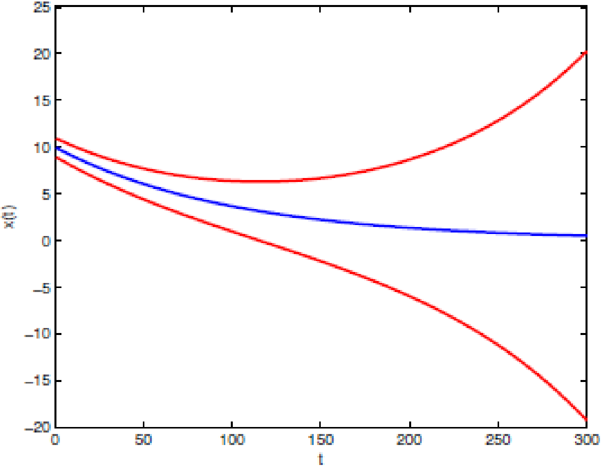

Figura: (vermelho) Suporte da solução numérica quando consideramos a soma baseada no princípio de extensão de Zadeh. (azul) o α-nível 1 da solução. Parâmetros utilizados: $X_0 = (9, 10, 11)$, $d = 0,1$ e passo $h = 0,1$ [2].

Solução baseada na conjunta $J_{(q,r)}$

Tomando $\oplus = +_{J_{\{q,r\}}}$, temos a seguinte solução numérica

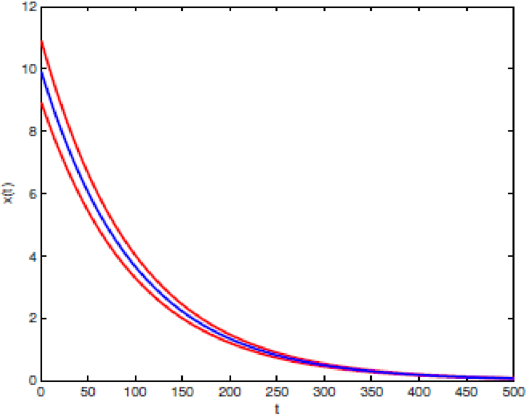

Figura: (vermelho) Suporte da solução numérica quando consideramos a soma completamente correlacionada negativamente. (azul) o α-nível 1 da solução. Parâmetros utilizados: $X_0 = (9, 10, 11)$, $d = 0,1$ e passo $h = 0,1$ [2].

Em cada iteração do método numérico o número fuzzy X_{t+1} é dado por:

$$X_{t+1} = X_t +_{J_{(q,r)}} (-hd)X_t$$

Reescrevendo, temos:

$$X_{t+1} = (1 - hd)X_t + 0$$

Isso significa que os números fuzzy X_{t+1} e X_t são completamente correlacionados através da conjunta $J_{(q,r)}$, com $q = (1 - hd)$ e $r = 0$.

Os números fuzzy podem ser utilizados para modelar incertezas presentes nos fenômenos físicos, químicos, biológicos...

As relações intrínsecas ao fenômeno estudado podem ser modeladas através de números fuzzy interativos.

As soluções numéricas, baseadas em operações aritméticas entre números fuzzy interativos, produzem resultados com menor incerteza ao longo do tempo se comparadas as soluções não interativas.

Bibliografia

L. C. Barros e Rodney Carlos Bassanezi, *"Tópicos de lógica Fuzzy e Biomatemática". Campinas: IMECC-UNICAMP. 2 ed., 2010.*

G. Barroso *"Um estudo sobre aritmética entre números fuzzy interativos e aplicações em biomatemática." Dissertação de mestrado, IMECC, UNICAMP, Campinas 2015.*

F. S. Pedro *"Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população". Tese de doutorado, IMECC, UNICAMP, Campinas 2017.*

V. F. Wasques, E. Esmi e L. C. Barros *"Solução numérica para PVI com condições iniciais fuzzy interativas: uma aplicação a modelos do tipo SIR". Revista de Biomatemática 27(2) 2017, 127-144.*

Obrigado.